

### 3.2 Der strenge Pseudoprimitivtest

Man kann den Pseudoprimitivtest verschärfen, indem man weitere Kennzeichen für Primzahlen auswertet. Sei  $n$  zunächst ungerade, zusammengesetzt und keine Primpotenz. Dann gibt es außer  $\pm 1$  auch nichttriviale Quadratwurzeln aus 1 in  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ; findet man eine solche, so hat man nachgewiesen, dass  $n$  zusammengesetzt ist. Aber wie soll man nichttriviale Einheitsquadratwurzeln finden, wenn man die Primzerlegung von  $n$  nicht kennt? Dazu wird, der Idee aus 2.2 folgend,  $n - 1$  aufgespalten in  $n - 1 = 2^s \cdot r$  mit ungeradem  $r$ .

Sei  $a \in \mathbb{M}_n$ . Falls  $n$  den Pseudoprimitivtest zur Basis  $a$  nicht besteht, ist es als zusammengesetzt erkannt. Andernfalls hat  $a$  in der multiplikativen Gruppe  $\mathbb{M}_n$  eine Ordnung  $\text{Ord}(a) \mid n - 1$ . In der Folge

$$a^r \bmod n, \quad a^{2r} \bmod n, \quad \dots, \quad a^{2^s r} \bmod n = 1$$

könnte bereits  $a^r \equiv 1 \pmod{n}$  sein. Dann wird  $a$  verworfen, ohne dass eine Entscheidung über  $n$  getroffen wird. Andernfalls tritt die 1 erstmals an späterer Stelle auf; das davor stehende Element muß dann Einheitswurzel  $\neq 1$  sein. Es kann  $-1$  sein; auch dann wird  $a$  ohne Entscheidung verworfen. Andernfalls ist eine nichttriviale Einheitswurzel gefunden und  $n$  als zusammengesetzt erkannt. Ist dagegen  $n$  prim, so gibt es in dieser Situation stets ein  $k$  mit  $0 \leq k < s$ , so dass

$$a^{2^k r} \equiv -1 \pmod{n}.$$

Sei nun  $n$  eine beliebige positive ganze Zahl, und  $n - 1$  habe die Zweierordnung  $s$  und den ungeraden Teil  $r$ . Dann sagt man,  $n$  bestehe den **strengen Pseudoprimitivtest zur Basis  $a$**  [nach SELFRIDGE ca. 1975], wenn

$$a^r \equiv 1 \pmod{n} \quad \text{oder} \quad a^{2^k r} \equiv -1 \pmod{n} \quad \text{für ein } k = 0, \dots, s - 1.$$

Insbesondere gilt dann  $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ .

Wir haben also die gleiche Situation wie in Abschnitt 2.3 mit  $u = n - 1$ . Die dortige Menge

$$B_u = \bigcup_{t=0}^s \{w \in \mathbb{M}_n \mid w^{r \cdot 2^t} = 1, w^{r \cdot 2^{t-1}} = -1\}$$

ist jetzt genau die Menge der Basen, für die  $n$  den strengen Pseudoprimitivtest besteht, also die Eigenschaft  $(E_{n,u})$  hat. Diese Basen werden auch **Primzeugen** für  $n$  genannt.

Jede Primzahl besteht den strengen Pseudoprimitivtest zu jeder Basis, die kein Vielfaches dieser Primzahl ist. Die CARMICHAEL-Zahl  $n = 561$  fällt schon bei  $a = 2$  durch: Es ist  $n - 1 = 560 = 16 \cdot 35$ ,

$$\begin{aligned} 2^{35} &\equiv 263 \pmod{561}, & 2^{70} &\equiv 166 \pmod{561}, \\ 2^{140} &\equiv 67 \pmod{561}, & 2^{280} &\equiv 1 \pmod{561}. \end{aligned}$$

Also ist 561 als zusammengesetzt erkannt. Die kleinste zusammengesetzte Zahl, die den strengen Pseudoprimitest für 2, 3 und 5 besteht, ist  $25326001 = 2251 \cdot 11251$ . Die einzige zusammengesetzte Zahl  $< 10^{11}$ , die ihn für 2, 3, 5 und 7 besteht, ist 3 215 031 751. Das erweckt die Hoffnung, dass dieser Test zum Erkennen von Primzahlen tatsächlich geeignet ist.

**Satz 2** *Sei  $n \geq 3$  ungerade. Dann sind äquivalent:*

- (i)  *$n$  ist prim.*
- (ii)  *$n$  besteht den strengen Pseudoprimitest zu jeder Basis  $a$ , die kein Vielfaches von  $n$  ist.*

*Beweis.* „(i)  $\implies$  (ii)“ wurde oben gezeigt.

„(ii)  $\implies$  (i)“: Wegen Satz 1 ist  $n$  prim oder eine CARMICHAEL-Zahl, insbesondere  $\lambda(n) \mid n - 1 = u$ ; außerdem ist  $n$  quadratfrei, erst recht keine Primpotenz. Also ist der Hilfssatz in 2.3 anwendbar; da nach Voraussetzung  $B_u = \mathbb{M}_n$ , folgt also, dass  $n$  Primpotenz, insgesamt also prim ist.  $\diamond$

**Korollar 3** *Ist  $n$  nicht prim, so gibt es höchstens  $\frac{\varphi(n)}{2}$  Basen  $< n$ , für die  $n$  den strengen Pseudoprimitest besteht.*

*Beweis.* Falls  $n$  CARMICHAEL-Zahl ist, folgt das aus Satz 1 in 2.3. Andernfalls ist  $A_u = \{w \in \mathbb{M}_n \mid w^{n-1} = 1\} < \mathbb{M}_n$  echte Untergruppe, und  $B_u \subseteq A_u$ .  $\diamond$

Bei genauerem Hinsehen kann man sogar die Schranke  $\frac{\varphi(n)}{4}$  von RABIN/MONIER herleiten.