4.6 Der Impagliazzo-Naor-Generator

Das Rucksack-Problem (knapsack problem, subset sum problem) ist bekanntlich das folgende:

Gegeben: Natürliche Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ und $T \in \mathbb{N}$.

Gesucht: Eine Teilmenge $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit

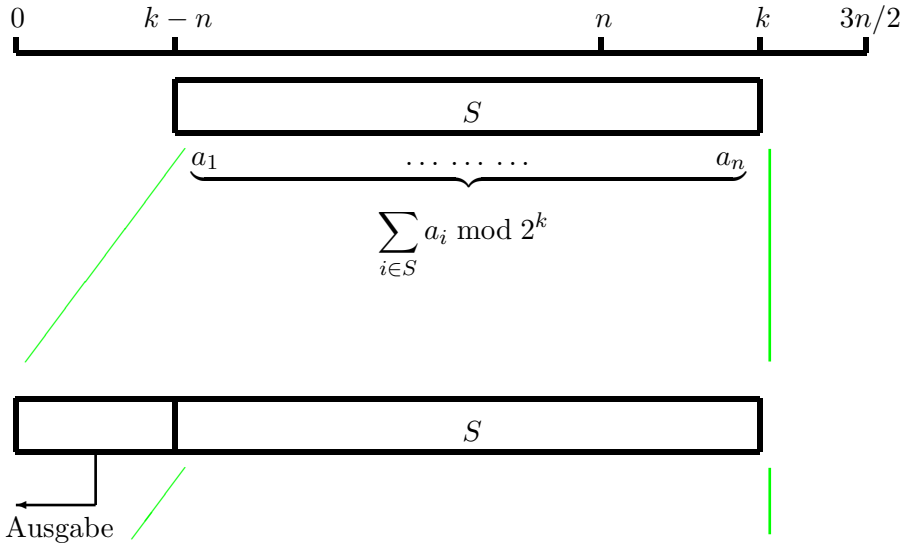
$$\sum_{i \in S} a_i = T.$$

Dieses Problem gilt als hart; es ist sogar NP-vollständig. Aufbauend darauf haben Impagliazzo und Naor den folgenden Zufallsgenerator entwickelt:

Seien k und n (genügend große) natürliche Zahlen mit $n < k < \frac{3n}{2}$; als Parameter werden $a_1, \ldots, a_n \in [1 \ldots 2^k]$ zufällig gewählt. [Achtung: Das sind viele große Zahlen.] Der Zustandsraum besteht aus der Potenzmenge von $\{1, \ldots, n\}$; die Zustände sind also Teilmengen $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ und werden durch Bitfolgen in $\mathbb{F}_2^n$ auf natürliche Weise repräsentiert. In jedem einzelnen Schritt wird die Summe

$$\sum_{i \in S} a_i \mod 2^k$$

gebildet. Das ist eine k-Bit-Zahl. Die ersten $k - n$ Bits werden ausgegeben, die letzten n Bits als neuer Zustand zurückbehalten, siehe die Abbildung.



Transformation und Outputfunktion sind also:

$$\begin{aligned} T(S) &= \sum_{i \in S} a_i \bmod 2^n \\ &\quad \text{(rechte } n \text{ Bits weiterverwenden)}, \\ U(S) &= \lfloor \frac{\sum_{i \in S} a_i \bmod 2^k}{2^n} \rfloor \\ &\quad \text{linke } k - n \text{ Bits ausgeben.} \end{aligned}$$

Falls dieser Zufallsgenerator nicht perfekt ist, ist das Rucksack-Problem effizient lösbar.

- R. Impagliazzo, M. Naor: Efficient cryptographic schemes provably as secure as subset sum. J. Cryptology 9 (1996), 199–216.