Wer ist arm?
– Wie der Kampf gegen die Armut durch eine schlechte Definition vernebelt wird.

Klaus Pommerening

Januar 2022; letzte Änderung: 30. März 2022

Zusammenfassung

Die in der Sozialpolitik gängige Definition von Armut ist mangelhaft. Sie bewirkt, dass in realistischen Szenarien – unabhängig von der Verteilung des Einkommens und von Einkommenszuwächsen – stets ein ungefähr gleichbleibender Anteil von 15–20 % der Bevölkerung als armutsgefährdet bezeichnet wird[1]. Das zugrunde liegende mathematische Modell führt darüber hinaus zu ziemlich absurden Effekten, z. B. zu einer Erhöhung der Armutsquote durch Maßnahmen, die ganz offensichtlich zu einer Verbesserung der Situation von Armen führen. Darüber hinaus kann man in manchen Szenarien ein instabiles Verhalten der Armutsquote bei Änderungen der Einkommensverteilung beobachten, d. h., es kommt zu unerwarteten, manchmal sogar großen Sprüngen.

Die Verringerung der Armut ist eine wesentliche Aufgabe der Gesellschaft. Ein schlechtes mathematisches Modell ist dabei nicht hilfreich: Aus ihm können keine gut begründeten Folgerungen oder gar belastbare Handlungsempfehlungen abgeleitet werden.

1 Definition

In der Europäischen Union gilt als **armutsgefährdet**, wessen Nettoäquivalenzeinkommen weniger als 60% des Medians[2] beträgt [9].

Das Nettoäquivalenzeinkommen ist eine Art gewichtetes Einkommen, bei dem berücksichtigt wird, dass durch das Zusammenleben mehrerer Personen Vorteile entstehen und dass sich der Bedarf von Kindern von dem von Erwachsenen unterscheidet.

[1] Typische Schlagzeile: „Jeder Sechste ist armutsgefährdet.“ Siehe dazu auch Abschnitt 7 für z. B. die Pareto-Verteilung.

[2] Der Median wird auch als mittleres Einkommen bezeichnet.

Die genaue Definition spielt für die folgenden Überlegungen aber keine Rolle, es kommt hier nur darauf an, dass für jede Person irgendwie ein Einkommen angebbar ist.

Armut wird somit nicht absolut definiert, etwa gemessen an Bedürfnissen, sondern relativ zur gesamten Einkommenssituation in der Gesellschaft. Die Vermutung drängt sich auf, dass mit dieser Definition der armutsgefährdete Anteil der Bevölkerung, die Armutsquote, ungefähr festgeschrieben ist, fast unabhängig von der konkreten Einkommensverteilung; theoretische Evidenz für diese Aussage wird im Abschnitt 7 hergeleitet. In vielen Situationen bewirkt eine Verbesserung der gesamten Einkommenssituation nur, dass sich Median und Armutsgrenze ebenfalls erhöhen und die Armutsquote, also der Anteil der Armutsgefährdeten an der Bevölkerung sich nicht ändert. Für realistische Verteilungen ist diese Vermutung ist nicht in jedem Fall ganz zutreffend, aber auch nicht völlig falsch, siehe die Abschnitte 5 und 8. Im Grunde misst die so definierte Armutsquote nur die Ungleichverteilung der Einkommen, und zwar wesentlich ungenauer als der Gini-Koeffizient [4, 11].

Der Bezug auf den Median [10] übernimmt dabei die Vor- und Nachteile dieser statistischen Maßzahl:

⊕ Der Median ist gegen viele irrelevante Einflüsse unempfindlich („robust“),

⊖ ... aber leider auch gegen manche relevante Einflüsse, wie z. B. allgemeine Einkommensänderungen, siehe den 1. und 3. Invarianzsatz (Abschnitte 5 und 7), oder starke Schwankungen in den Randbereichen der Verteilung, siehe den 2. Invarianzsatz (Abschnitt 5),

⊖ ... und empfindlich gegen manche irrelevante, z. B. leichte, Schwankungen im mittleren Bereich der Verteilung, siehe die Beispiele in den Abschnitten 3 und 8.

Das bedeutet, dass Schlussfolgerungen über Veränderungen der Armutsquote sehr unzuverlässig sind: Es gibt viele, z. T. krasse, Veränderungen der Einkommensverteilung, die an der Armutsquote nichts ändern. Dagegen können kleine, fast unauffällige Veränderungen die Armutsquote stark beeinflussen.

So kann etwa bei der Einführung eines Mindesteinkommens ein Euro mehr oder weniger den Unterschied ausmachen, ob die Armutsquote unverändert hoch bleibt oder mit einem Schlag auf Null reduziert wird.

Andererseits sind gewaltige Umverteilungen – von unten nach oben oder von oben nach unten – und große allgemeine Einkommensverbesserungen möglich, ohne dass sich die Armutsquote ändert. Es ist sogar möglich, dass sich die Armutsquote *entgegen* der offensichtlichen Entwickung der Armutssituation ändert.

Dass irreguläre Effekte in der Realität durchaus zu beobachten sind, zeigt die Verringerung der Armutsquote in der Schweiz von 2015 auf 2016 trotz leicht gesunkener Einkommen [17].

Für eine kritische Auseinandersetzung mit der Definition von „Armut“ siehe auch die Wikipedia-Artikel [7] und [8]. Statistische Folgerungen werden in [2] (durchaus kritisch) hergeleitet.

Natürlich weist auch schon die Definition des Nettoäquivalenzeinkommens bei genauerem Hinsehen erhebliche methodische Probleme auf, die die Definition von Armut zusätzlich belasten, siehe [6].

2 Mathematisches Modell

Zugrunde liegt als „Bevölkerung“ eine endliche Menge $\mathcal{B}$ mit n Elementen. Jedes Element x von $\mathcal{B}$ hat ein Einkommen $E(x)$, d. h., es ist eine Funktion

$$E\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gegeben (sinnvollerweise mit Werten $E(x) \geq 0$).

Definition. Eine **Einkommensverteilung** ist ein Paar $(\mathcal{B}, E)$ aus einer endlichen Menge $\mathcal{B}$ und einer nicht-negativen reellwertigen Funktion $E\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Für die Definition der Armut (oder Armutsgefährdung) ist der Median der Funktion E ausschlaggebend. Um ihn in einer Formel auszudrücken, wird die Bevölkerung $\mathcal{B}$ (hypothetisch) nach steigendem Einkommen durchnummeriert:

$$\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

mit

$$E(x_{i+1}) \geq E(x_i) \quad \text{für } i = 1, \ldots n-1.$$

Der Median M_E von E ist dann

$$M_E = \begin{cases} E(x_{(n+1)/2}), & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{2}\left[E(x_{n/2}) + E(x_{n/2+1})\right], & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

also der mittlere Wert bzw. der Durchschnitt der beiden mittleren Werte [10].

Beispiele: Der Median der Zahlen $\{1, 3, 3, 10, 100\}$ (mit $n = 5$) ist 3.

Der Median der Zahlen $\{1, 3, 3, 10, 100, 1000\}$ (mit $n = 6$) ist $(10+3)/2 = 6.5$.

Um Armut zu definieren, wählt man jetzt (letztlich willkürlich!) einen **Armutskoeffizienten** $\eta > 0$, etwa $\eta = 0.6$ nach der EU-Definition. (In den meisten Fällen nimmt man $\eta \leq 1$ an.) Die **Armutsgrenze**[3] ist dann $\eta \cdot M_E$. Damit ist die Menge der **armutsgefährdeten** Personen definiert als die Menge derjenigen, deren Einkommen unter der Armutsgrenze liegt, also

$$\mathcal{A}_{E,\eta} = \{x \in \mathcal{B} \mid E(x) < \eta \cdot M_E\}.$$

Die **Armutsquote** ist $q_\eta(E) := \#\mathcal{A}_{E,\eta}/\#\mathcal{B}$, also der Anteil der Armutsgefährdeten an der gesamten Bevölkerung. Aus dieser Definition folgt unmittelbar:

[3] die auch als Armutsgefährdungsschwelle bezeichnet wird

Satz 1 *Genau dann ist die Armutsquote $q_\eta(E) = 0$, d. h., $\mathcal{A}_{E,\eta} = \emptyset$, wenn das geringste Einkommen $E(x_1) \geq \eta \cdot M_E$ ist.*

Eine erste, ziemlich absurde, Folgerung aus dieser Überlegung:

Wenn alle Einkommen 0 sind, ist niemand armutsgefährdet.

Denn dann ist der Median $M_E = 0$ und die Armutsgrenze $\eta \cdot M_E = 0$.

Wie hoch kann die Armutsquote maximal sein (wenn wir $\eta \leq 1$ annehmen)? Nun, es sind jeweils rund 50 % der Einkommen $\leq M_E$ und $\geq M_E$. Daraus folgt sofort die tröstliche Erkenntnis, dass niemals mehr als die Hälfte der Bevölkerung arm sein kann:

Satz 2 *Unter der Annahme, dass $\eta \leq 1$, ist die Armutsquote maximal 50 %. Dieser Wert kann erreicht werden (für beliebiges $\eta \in [0, 1]$).*

Genauer:

- Ist die Bevölkerungszahl $n = \#\mathcal{B}$ ungerade, so sind maximal $(n-1)/2$ der Einkommen $< M_E = E(x_{(n+1)/2})$, und auch nur diese können $< \eta \cdot M_E$ sein. Die Armutsquote ist also
$$\leq \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n},$$
und dieser Wert wird erreicht, wenn die unteren $(n-1)/2$ der Einkommen auch $< \eta \cdot M_E$, etwa $= 0$, sind.

- Ist die Bevölkerungszahl n gerade, so sind maximal $n/2$ der Einkommen $< M_E$, und auch nur diese können $< \eta \cdot M_E$ sein. Die Armutsquote ist also $\leq n/2n = 1/2$, und auch dieser Wert kann erreicht werden.

Eine weitere, ziemlich absurde, Folgerung ist:

Wählt man den Armutskoeffizienten als $\eta = 1$, so ist ziemlich genau die Hälfte der Bevölkerung armutsgefährdet, egal wie die Einkommen verteilt sind

(mit der Einschränkung, dass nur wenige der Einkommen genau auf dem Median liegen).

3 Beispiel

Ein einfaches Beispiel zeigt, zu welch weiteren absurden Folgerungen dieses mathematische Modell für die Definition von Armut führen kann. Eine Bevölkerung aus 20 Personen sei der Einfachheit halber nach der Einkommenshöhe durchnummeriert:

$$\mathcal{B} = \{1, 2, \ldots, 20\},$$

die entsprechende Liste der Einkommen sei

$$(0, 0, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 10, 12, 15, 20).$$

Der Einkommensmedian ist

$$M_E = \frac{1}{2}\,[E(10) + E(11)] = \frac{1}{2}\,(4+6) = 5,$$

für den „EU-Wert“ $\eta = 0.6$ liegt die Armutsgrenze, also die Grenze zur Armutsgefährdung, daher bei $\eta\, M_E = 3.0$. Die ersten 5 Individuen sind also armutsgefährdet, das sind 25 % der Bevölkerung. Abbildung 1 illustriert die Situation.

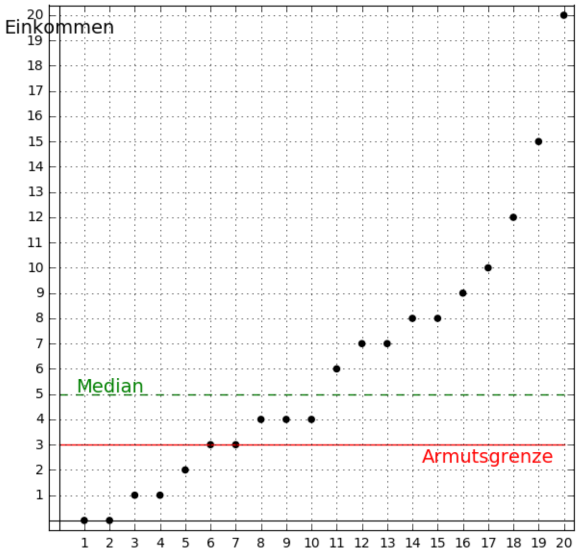

Abbildung 1: Eine (fiktive) Einkommensverteilung. Armutsgefährdet sind 5 Personen, also 25 % der Bevölkerung.

Nun wird ein *Grundeinkommen* eingeführt: Alle unter der Armutsgrenze liegenden Einkommen werden genau auf die Armutsgrenze, also auf 3, erhöht – dann liegt niemand mehr unter dieser. Der Median ändert sich dadurch nicht, also auch nicht die Armutsgrenze: *Die Armut ist besiegt!* Illustriert wird diese Situation durch Abbildung 2.

Der dadurch erreichte Zustand ist aber sehr labil: Schon die geringste Änderung kann ihn wieder zerstören. Gönnen wir dem Individuum 10 ebenfalls eine Einkommenserhöhung, minimal von $E(10) = 4$ auf $E'(10) = 5$; alle übrigen Einkommen bleiben gleich, also $E'(x) = E(x)$ für $x \neq 10$. Dadurch erhöht sich der Median auf

$$M_{E'} = \frac{1}{2}\,\left[E'(10) + E'(11)\right] = \frac{1}{2}\,(5+6) = 5.5$$

und die Armutsgrenze auf $\eta\, M_{E'} = 3.3$. Das hat gravierende Folgen: Das soeben erkämpfte Minimaleinkommen 3 liegt jetzt wieder unter der Armutsgrenze, siehe Abbildung 3. Schlimmer noch: Jetzt sind sogar 7 Personen armutsgefährdet, also 35 % der Bevölkerung. Die Armut ist zurück, die Armutsquote von 0 auf 35 % gestiegen.

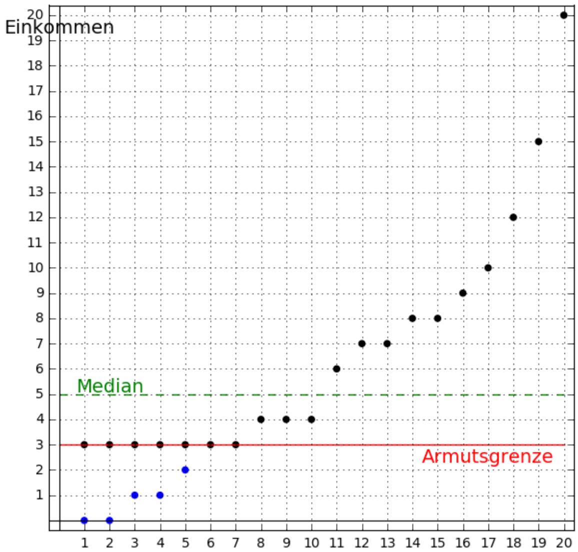

Abbildung 2: Die Armut wird besiegt, indem die Einkommen der Armutsgefährdeten – die blauen Punkte – auf die Armutsgrenze – die darüber liegenden schwarzen Punkte – angehoben werden.

Eine geringfügige Erhöhung eines einzelnen mittleren Einkommens hat 35 % der Bevölkerung in Armut gestürzt.

Und obwohl einige niedrige bis mittlere Einkommen gegenüber der Ausgangssituation gestiegen, die übrigen gleich geblieben sind, hat die Armut zugenommen.

Das ist nun wahrlich kein überzeugendes Argument für die Sinnhaftigkeit dieser Definition von Armut.

4 Extrembeispiele: Kommunismus und Zweiklassen-Gesellschaft

Auch weitere, etwas allgemeiner gehaltene Beispiele führen zu absurden Folgerungen. Betrachtet werden zunächst zwei ganz extreme Einkommensverteilungen.

Perfekter Kommunismus

Falls alle Personen x in der Bevölkerung das gleiche Einkommen $E(x) = E_0$ haben, ist der Median $M_E = E_0$. Ist $\eta \leq 1$, so liegt kein Einkommen unter dem Wert ηE_0, niemand ist also armutsgefährdet, d. h., $\mathcal{A}_E = \emptyset$.

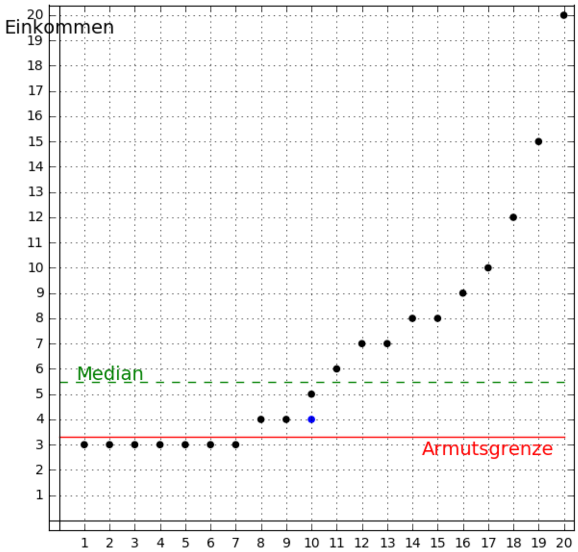

Abbildung 3: Die Armut kehrt dadurch zurück, dass die Person 10 eine geringfügige Erhöhung erhält, vom blauen Punkt zum schwarzen darüber. Und schon sind 7 Personen armutsgefährdet, also sogar 35 % der Bevölkerung, mehr als zuvor.

Definition. Die Einkommensverteilung $(\mathcal{B}, E)$ heißt **perfekt kommunistisch**, wenn E eine konstante Funktion ist.

Satz 3 *Sei $(\mathcal{B}, E)$ eine perfekt kommunistische Einkommensverteilung, und der Armutskoeffizient sei $\eta \leq 1$. Dann ist die Armutsquote $q_\eta(E) = 0$.*

Nach der EU-Definition (mit $\eta = 0.6$)

gibt es also in einer perfekt kommunistischen Gesellschaft keine Armut,

egal wie hoch oder niedrig das Einheitseinkommen ist.

Wählt man hingegen einen Wert $\eta > 1$, so ist die gesamte Bevölkerung armutsgefährdet, wieder egal wie hoch oder niedrig das Einkommen ist.

Das ist freilich ein sehr unrealistisches Extrembeispiel, dennoch sollte eine sinnvolle Definition nicht solche absurden Folgerungen zulassen.

Die perfekte Zweiklassen-Gesellschaft

Definition. Die Einkommensverteilung $(\mathcal{B}, E)$ heißt **perfekte Zweiklassen-Verteilung**, wenn die Bevölkerung $\mathcal{B}$ in zwei Klassen zerfällt,

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \,\dot{\cup}\, \mathcal{B}_0$$

mit

$$n_1 := \#\mathcal{B}_1 \;\; < \;\; \#\mathcal{B}_0 =: n_0,$$

und E auf $\mathcal{B}_1$ den konstanten Wert E_1, auf $\mathcal{B}_0$ den konstanten Wert E_0 annimmt mit $E_0 < E_1$.

$\mathcal{B}_1$ heißt die **privilegierte Klasse**, $\mathcal{B}_0$ die **unterprivilegierte Klasse**.

Alle Mitglieder der privilegierten Klasse $\mathcal{B}_1$ haben also das gleiche hohe Einkommen E_1 und alle Mitglieder der unterprivilegierten Klasse $\mathcal{B}_0$ das gleiche niedrige Einkommen E_0. Da $n_1 < n_0$, ist der Median des Einkommens dann

$$M_E = E_0.$$

Satz 4 *Sei $(\mathcal{B}, E)$ eine perfekte Zweiklassen-Verteilung, und der Armutskoeffizient sei $\eta \leq 1$. Dann ist die Armutsquote $q_\eta(E) = 0$.*

Unter der üblichen Annahme, dass der Armutskoeffizient $\eta \leq 1$ ist, ist in diesem Szenario also niemand armutsgefährdet. Das gilt sogar, wenn das Einkommen der unterprivilegierten Klasse $\mathcal{B}_0$ Null ist ($E_0 = 0$). Mit anderen Worten:

In einer perfekten Zweiklassen-Gesellschaft gibt es keine Armut,

egal wie hoch oder niedrig das Einkommen der unterprivilegierten Klasse ist, solange nur die Zahl der Unterprivilegierten größer ist als die Zahl der Privilegierten.

Durch Änderung der Zahl der Unterprivilegierten kann man einen interessanten Effekt erreichen (unter der Annahme, dass $E_0 < \eta \cdot E_1$): „Befördert“ man Unterprivilegierte in die privilegierte Klasse, so bleibt die Armutsquote bei 0, solange mindestens die Hälfte der Bevölkerung unterprivilegiert bleibt. Wird diese Grenze überschritten, so springt der Wert des Medians von E_0 auf E_1 und die Armutsquote von 0 auf nahezu 50 %. Es gibt also einen extremen „Kipppunkt“. Dieser zeigt auch beim umgekehrten Vorgang Wirkung: Entzieht man einigen der jetzt Privilegierten ihr höheres Einkommen, so kippt die Armutsquote wieder von 50 % auf 0. Der groteske Effekt dieser beispielhaften Überlegung ist:

Man kann (manchmal) die Armut bekämpfen, indem man einigen Leuten etwas wegnimmt.

Das kann man sogar in der Summe neutral gestalten, indem man das Weggenomme unter den übrigen Privilegierten verteilt.

5 Änderungen der Einkommensverteilung

Lineare Einkommenserhöhung

Nehmen wir eine beliebige Einkommensfunktion E an und gönnen jeder Person einen Einkommenszuwachs um einen festen Prozentsatz. D. h., die neue Einkommensfunktion ist $E' = \alpha \cdot E$ mit $\alpha > 1$ (der Einkommenszuwachs beträgt also $(\alpha - 1) \cdot 100$ %). Dann ändert sich der Median zu

$$M_{E'} = \alpha \cdot M_E,$$

und es gilt

$$E'(x) < \eta \cdot M_{E'} \iff E(x) < \eta \cdot M_E,$$

also $\mathcal{A}_{E',\eta} = \mathcal{A}_{E,\eta}$:

Invarianzsatz 1 *Werden alle Einkommen $E(x)$ generell gleichmäßig um einen konstanten Faktor $\alpha > 0$ zu $E' = \alpha \cdot E$ erhöht, so ist $\mathcal{A}_{E',\eta} = \mathcal{A}_{E,\eta}$ und $q_\eta(E') = q_\eta(E)$.*

Mit Worten ausgedrückt bedeutet das:

Eine lineare Einkommenserhöhung ändert nichts an der Armutsgefährdung, obwohl es danach allen besser geht.

Selbst wenn alle Personen das 100-fache Einkommen erhielten, blieben die Armen arm (im Sinne der Definition).

Gleiches gilt natürlich auch für eine lineare *Einkommenskürzung* ($\alpha < 1$): Dadurch wird niemand arm, der es nicht schon vorher war. Man könnte zu der Ansicht gelangen, dass weder Steuererhöhungen noch Steuersenkungen eine Auswirkung auf die Armut haben, wenn sie nur die gesamte Bevölkerung gleichmäßig betreffen.

Der 1. Invarianzsatz ist aber nicht auf lineare Einkommensänderungen beschränkt: In Abschnitt 7 wird diese Invarianz auch bei einer Reihe anderer für die gesamte Bevölkerung gültigen Einkommensverbesserungen beobachtet.

Grundeinkommen

Werden alle Einkommen, die unterhalb von M_E liegen, so angehoben, dass sie immer noch unterhalb von M_E liegen, so ändert sich am Median nichts. Genauer: Es sei

$$\begin{aligned} E'(x) = E(x), &\quad \text{falls} \quad E(x) \geq M_E, \\ E(x) \leq E'(x) \leq M_E, &\quad \text{falls} \quad E(x) < M_E. \end{aligned}$$

Dann ist

$$M_{E'} = M_E.$$

Das ist insbesondere dann der Fall, wenn man alle „prekären" Einkommen, die Armutsgefährdung bedeuten, wie in Abschnitt 3, Abbildung 2, auf das „Grundeinkommen" $\eta \cdot M_E$ erhöht. Damit würde man die Armut besiegen. Genauer – unter der Annahme, dass $\eta \leq 1$ – sei

$$E'(x) = \begin{cases} E(x), & \text{falls } E(x) \geq \eta \cdot M_E, \\ \eta \cdot M_E & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist also $M_{E'} = M_E$, und die Menge der Armutsgefährdeten,

$$\mathcal{A}_{E',\eta} = \{x \in \mathcal{B} \mid E'(x) < \eta \cdot M_{E'}\},$$

ist leer. Damit ist als Verallgemeinerung der Situation von Abbildung 2 bewiesen:

Satz 5 *Ist der Armutskoeffizient* $\eta \le 1$ *und werden alle Einkommen* $E(x) < \eta \cdot M_E$ *auf* $E'(x) = \eta \cdot M_E$ *angehoben, so wird die Armutsquote* $q_\eta(E') = 0$.

Mit Worten ausgedrückt:

Man kann man die Armutsgefährdung beseitigen, indem man alle niedrigeren Einkommen auf das Grundeinkommen $\eta \cdot M_E$ anhebt.

Allgemeiner als in Abschnitt 3 wird aus diesem Beispiel deutlich, wie wenig stabil die Armutsquote ist: Eine sehr geringe Änderung der Einkommensverteilung kann drastische Änderungen der Armutsquote zur Folge haben.

Dramatisch anders ist nämlich die Lage, wenn man das Grundeinkommen geringfügig niedriger ansetzt; dabei soll $\varepsilon > 0$ die Abweichung des größten Einkommens $< \eta \cdot M_E$ von $\eta \cdot M_E$ sein.

Korollar 1 *Ist der Armutskoeffizient* $\eta \le 1$ *und werden alle Einkommen* $E(x) < \eta \cdot M_E$ *auf einen konstanten Wert* $E'(x) = E_0$ *mit* $\eta \cdot M_E - \varepsilon \le E_0 < \eta \cdot M_E$ *angehoben, so ist* $\mathcal{A}_{E',\eta} = \mathcal{A}_{E,\eta}$ *und* $q_\eta(E') = q_\eta(E)$.

Dann bleibt nämlich jedes Einkommen, das unter der alten Grenze liegt, auch unter der neuen, die ja gleich der unveränderten alten ist. Mit anderen Worten:

Es ändert sich nichts an der Armutsgefährdung, wenn alle niedrigeren Einkommen auf ein Grundeinkommen $< \eta \cdot M_E$ angehoben werden.

Und man sieht auch:

Eine geringfügige Änderung des Armutskoeffizienten η kann eine große Änderung der Armutsquote bewirken.

Deckelung

Symmetrisch dazu ist die Situation, dass die unteren Einkommen unverändert bleiben, aber dafür die oberen Einkommen gekürzt werden: In dem Szenario

$$\begin{aligned} E(x) \ge E'(x) \ge M_E, &\quad \text{falls} \quad E(x) \ge M_E, \\ E'(x) = E(x), &\quad \text{falls} \quad E(x) < M_E. \end{aligned}$$

ist wieder $M_{E'} = M_E$ und $\mathcal{A}_{E',\eta} = \mathcal{A}_{E,\eta}$. Insbesondere gilt das, wenn alle höheren Einkommen durch eine Obergrenze $E_1 \ge M_E$ gedeckelt oder gar auf den Wert M_E gekappt werden:

Satz 6 *Ist der Armutskoeffizient* $\eta \le 1$, $E_1 \ge M_E$, *und werden alle Einkommen* $E(x) \ge E_1$ *auf* $E'(x) = E_1$ *abgesenkt, so ist* $\mathcal{A}_{E',\eta} = \mathcal{A}_{E,\eta}$ *und* $q_\eta(E') = q_\eta(E)$.

In Worten: Eine Deckelung aller höheren Einkommen auf eine Obergrenze $E_1 \geq M_E$ ändert nichts an der Armutsgefährdung.

Diese Effekte kann man kombinieren:

Korollar 2 *Sei der Armutskoeffizient $\eta \leq 1$, und seien $E_0, E_1 \in \mathbb{R}$ Konstanten mit $E_1 \geq M_E$ und $E_0 < \eta \cdot M_E$. Für die Einkommensfunktion $E' \colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ gelte*

$$E'(x) = \begin{cases} E_0, & \text{falls } E(x) \leq E_0, \\ E_1, & \text{falls } E(x) \geq E_1, \\ E(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $M_{E'} = M_E$ und $\mathcal{A}_{E',\eta} = \mathcal{A}_{E,\eta}$ und $q_\eta(E') = q_\eta(E)$.

Die verbale Interpretation dieses Ergebnisses besagt (für einen Armutskoeffizienten $\eta \leq 1$), dass sich an der Armutsgefährdung nichts ändert, wenn

(i) alle niedrigeren Einkommen $E(x)$ auf ein Grundeinkommen $E_0 < \eta \cdot M_E$ angehoben und

(ii) alle höheren Einkommen durch eine Obergrenze $E_1 \geq M_E$ gedeckelt werden.

Das liefe auf eine gewaltige *„Umverteilung von oben nach unten“ hinaus, die aber genau gar nichts an der Zahl der Armutsgefährdeten ändern würde.*

Der zweite Invarianzsatz

Allgemeiner führenen die Überlegungen der letzten beiden Unterabschnitte (unter der Annahme eines Armutskoeffizienten von $\eta \leq 1$) zu dem – mathematisch völlig trivialen – Ergebnis:

Invarianzsatz 2 *(Für $\eta \leq 1$) Eine Änderung der Einkommensfunktion E zu E' lässt die Menge $\mathcal{A}_{E,\eta}$ der Armutsgefährdeten ungeändert, wenn*

(i) $M_{E'} = M_E$,

(ii) $E'(x) < \eta \cdot M_E \Leftrightarrow E(x) < \eta \cdot M_E$ *für alle* $x \in \mathcal{B}$.

Beweis. Es ist

$$\mathcal{A}_{E',\eta} = \{x \in \mathcal{B} \mid E'(x) < \eta \cdot M_{E'}\} = \mathcal{A}_{E,\eta}$$

wegen (i) und (ii). ◇

Solange also der Median konstant gehalten wird, können die Einkommen unterhalb der Armutsgrenze $\eta \cdot M_E$ beliebig (unter Einhaltung dieser Grenze) geändert werden, ohne dass sich an der Menge der Armutsgefährdeten irgendetwas ändert. Zusätzlich können auch alle Einkommen $> M_E$ beliebig geändert werden, solange sie nur $\geq M_E$ bleiben – dann bleibt nämlich der Median M_E erhalten.

Insbesondere erlaubt dieses Ergebnis *eine gewaltige „Umverteilung von unten nach oben“, ohne die Armutsquote zu ändern.*

Deutliche Umverteilungen von oben nach unten wie auch von unten nach oben sind möglich, ohne dass sich die Armutsquote ändert.

Konstante Einkommenserhöhung

Nehmen wir an, alle Einkommen werden um einen festen Betrag Δ erhöht, also

$$E' = E + \Delta.$$

Wie lässt sich auf diese Weise die Armut verringern?

Unmittelbar aus der Definition folgt, dass der Einkommens-Median sich ebenfalls um Δ verschiebt: $M_{E'} = M_E + \Delta$. Die Grenze zur Armutsgefährdung ändert sich also zu

$$\eta \cdot M_{E'} = \eta \cdot M_E + \eta \cdot \Delta.$$

Eine Person x ist armutsgefährdet, wenn ihr neues Einkommen unterhalb dieser Grenze liegt, d. h., wenn $E'(x) < \eta \cdot M_{E'}$. Diese Bedingung lässt sich äquivalent umformen:

$$\begin{aligned} E'(x) \ < \ \eta \cdot M_{E'} \quad &\iff \quad E(x) + \Delta \ < \ \eta \cdot M_E + \eta \cdot \Delta \\ &\iff \quad E(x) + (1-\eta) \cdot \Delta \ < \ \eta \cdot M_E \\ &\iff \quad E(x) \ < \ \eta \cdot M_E - \delta, \end{aligned}$$

wobei $\delta := (1-\eta) \cdot \Delta$ ein Maß dafür ist, wieviele Personen aus der Armutsgefährdung befreit werden: alle diejenigen mit ursprüglichem Einkommen $\eta \cdot M_E - \delta \le E(x) < \eta \cdot M_E$.

Satz 7 *Nach einer Einkommenserhöhung um einen festen Betrag Δ ist die Menge der noch Armutsgefährdeten*

$$\mathcal{A}_{E',\eta} = \{x \in \mathcal{B} \mid E(x) < \eta \cdot M_E - \delta\},$$

wobei $\delta = (1-\eta) \cdot \Delta$.

Beispiel. Für den EU-Armutskoeffizienten $\eta = 0.6$ ist $1 - \eta = 0.4$, also $\delta = 0.4 \cdot \Delta$. Bei einem gleichmäßigen Einkommenszuwachs um $\Delta = 100$ € werden also alle Personen aus der Armutsgefährdung befreit, die zuvor bis zu 40 € unterhalb der Armutsgrenze lagen.

Man kann das auch so ausdrücken, dass 60 € *des Einkommenszuwachses einfach dadurch verpuffen, dass die Armutsgrenze mitwächst.*

Für den Fall $\eta = 1$ bleibt in Satz 7 die Armutsquote konstant, im Fall $\eta > 1$ nimmt die Armut sogar zu! Im realistischen Fall $\eta < 1$ allerdings ist, wenn die konstante Einkommenserhöhung groß genug ist, danach niemand mehr arm – eine äquivalente Umformung ergibt nach Satz 7 mit dem minimalen Einkommen $E(x_1)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{E',\eta} = \emptyset \quad &\iff \quad E(x_1) \ \ge \ \eta \cdot M_E - \delta \ = \ \eta \cdot M_E - (1-\eta) \cdot \Delta \\ &\iff \quad (1-\eta) \cdot \Delta \ \ge \ \eta \cdot M_E - E(x_1) \\ &\iff \quad \Delta \ \ge \ \frac{\eta \cdot M_E - E(x_1)}{1-\eta}\,. \end{aligned}$$

Korollar 3 (*Für* $\eta < 1$) *Nach einer konstanten Einkommenserhöhung um mindestens*

$$\frac{\eta \cdot M_E - E(x_1)}{1 - \eta}$$

ist die Armutsquote in der Bevölkerung 0*.*

Beispiel. Im obigen Beispiel mit $\eta = 0.6$ nehmen wir an, dass das Minimaleinkommen $E(x_1) = 500$ € beträgt, und der Median $M_E = 1500$ €. Dann ist die nötige konstante Erhöhung in €

$$\Delta = \frac{0.6 \cdot 1500 - 500}{0.4} = 1000.$$

Danach ist der Median 2500 € und das minimale Einkommen 1500 € $= 0.6 \cdot 2500$ €, et voilà: *Niemand ist mehr armutsgefährdet.* Allerdings musste das Minimaleinkommen dafür verdreifacht werden.

Durch Erhöhung aller Einkommen um einen festen „Sockelbetrag“ lässt sich die Armutsquote auf 0 bringen. Der dazu nötige Sockelbetrag kann allerdings erheblich sein.

6 Reale Einkommensverteilungen

Die gezielt konstruierten Beispiele der Abschnitte 3 und 4 dienten dazu, die Grenzen des mathematischen Modells für „Armutsgefährdung“ auszuloten. Aber wie bewährt sich das Modell in Situationen, in denen das Einkommen in etwa einer real beobachteten Verteilung folgt?

Dazu nehmen wir im folgenden die Einkommensverteilung E als ganzzahlig[4] (und nicht-negativ) an,

$$E \colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Die Verteilung kann man beschreiben durch die Folge $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$, wobei

$$n_i := \#\{x \in \mathcal{B} \mid E(x) = i\}$$

die Anzahl der Personen mit Einkommen i ist; diese Folge entspricht also dem Histogramm der Einkommensverteilung. Die gesamte Personenzahl ist

$$n = \#\mathcal{B} = \sum_{i \in \mathbb{N}} n_i.$$

Im Folgenden werden für diese Situation Algorithmen zur Bestimmung des Medians und der Armutsquote angegeben.

[4] Das ist keine wesentliche Einschränkung: Geld ist eine diskrete Größe, Einkommen sind ganzzahlige Vielfache der jeweiligen Währungseinheit.

Mathematisch kann man eine Äquivalenz von Einkommensverteilungen E und E' so definieren:

$$E \sim E' \Longleftrightarrow \text{Es gibt eine Permutation } \sigma \text{ von } \mathcal{B} \text{ mit } E' = E \circ \sigma.$$

Die Folgen $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ repräsentieren dann genau die Äquivalenzklassen, und sowohl Armutsquote als auch Gini-Koeffizient [4] sind auf den Äquivalenzklassen konstant.

Berechnung des Medians

Da die Bevölkerung $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ als endlich angenommen wird, gibt es auch nur endlich viele verschiedene Einkommen $E(x)$, o. B. d. A. $E(x_1) \leq \ldots \leq E(x_n)$. Deren Verteilung ist also sogar schon durch die endliche Folge

$$(n_i)_{0\leq i\leq r} \in \mathbb{N}^{r+1}$$

von natürlichen Zahlen (= ganzen Zahlen ≥ 0) beschreibbar, wobei für r das maximale Einkommen genommen werden kann. Falls die Gesamtsumme dieser Folge $n = 0$ ist, sind alle Einträge $n_i = 0$, und man kann den Median auch auf 0 setzen. Für den weiteren Verlauf des Algorithmus kann man dann $n > 0$ annehmen.

Entscheidend für die Bestimmung des Medians M_E sind nun die Partialsummen

$$s_k := \sum_{i=0}^{k} n_i \quad \text{für } k = 0, \ldots, r,$$

sie geben die Anzahl der i mit $E(x_i) \leq k$ an. Gesucht ist der minimale Index k mit $s_k \geq n/2$. Dann ist $s_{k-1} < n/2$ und $n_k = s_k - s_{k-1} \geq 1$. Das Einkommen k kommt also tatsächlich vor. Daraus folgt:

- Für ungerades n ist $s_{k-1} \leq (n-1)/2$ und $s_k \geq (n+1)/2$, also ist $E(x_{(n+1)/2}) = k$, und das ist der Median.
- Für gerades n ist $s_{k-1} \leq n/2 - 1$ und $s_k \geq n/2$, also ist $E(x_{n/2}) = k$.
  - Falls $s_k > n/2$, ist $s_k \geq n/2 + 1$, also auch $E(x_{n/2+1}) = k$ und somit $[E(x_{n/2}) + E(x_{n/2+1})]/2 = k$ der Median.
  - Falls $s_k = n/2$, ist $E(x_{n/2+1}) = j$, wobei $j > k$ minimal mit $n_j > 0$.

Zusammengefasst (für $n \geq 1$):

- Falls $s_k > n/2$, ist k der Median M_E.
- Andernfalls ist $s_k = n/2 < n$ (und n gerade), also gibt es einen Index $j > k$ mit $n_j > 0$. Für den minimalen solchen ist $(k + j)/2$ der gesuchte Median M_E.

Der Algorithmus läuft also zu gegebener Folge (n_i) so ab:

- Man bildet $n := \sum n_i$. Falls $n = 0$, gibt man 0 aus.
- Man setzt $k := 0$, $s := 0$ (aktuell betrachtetes Einkommen und Partialsumme).
- (Schleife über k) Die Partialsumme s wird um n_k erhöht.
  - Falls $s > n/2$, gibt man k aus.
  - Falls $s = n/2$, bestimmt man den minimalen Index $j > k$ mit $n_j > 0$ und gibt dann $(k + j)/2$ aus.
  - Andernfalls, d. h. wenn $s_k < n/2$, wird k für den nächsten Schleifendurchlauf inkrementiert.

Die Übersetzung in SageMath-Code steht im Anhang A.1.

Die Zahl der Armutsgefährdeten

Armutsgefährdet sind nach Definition die, deren Einkommen i unterhalb von $\eta \cdot M_E$ liegt, wobei η der Armutskoeffizient ist. Ihre Gesamtzahl ist

$$n_A = s_k, \quad \text{wobei } k = \lceil \eta \cdot M_E \rceil - 1$$

die größte ganze Zahl $< \eta \cdot M_E$ ist. Zur Berechnung muss man also, nachdem man den Median bestimmt hat, nur noch $n_0 + \cdots + n_k$ addieren. Der SageMath-Code steht im Anhang A.2.

Beispiel: Die Einkommensverteilung in Deutschland

Als Beispiel für eine typische Einkommensverteilung betrachten wir die in Abbildung 4 dargestellte für Deutschland im Jahre 2011 aus dem „Armuts- und Reichtumsbericht der Bundesregierung“.[5]

Für die Beispielrechnung verwenden wir eine vergröberte, auf eine kleinere Bevölkerung heruntergerechnete, Version mit dem Histogramm

```
hist = [0,0,0,1,3,6,11,16,22,29,35,41,46,51,56,59,60,61,61,60,
57,53,51,48,45,40,36,32,29,26,24,21,18,15,13,12,11,10,9,8,7,7,
6,6,5,5,4,4,3,3,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1]
```

der Länge 60 plus der vorangestellten 0. Das entspricht einer Bevölerung der Größe $n = 1240$ und wird in Abbildung 5 veranschaulicht mithilfe des SageMath-Codes

```
ptlst = []
for i in range(ll):
    ptlst.append([i,hist[i]])
plot(line(ptlst))
```

[5] Dabei handelt es sich um das Nettoäquivalenzeinkommen.

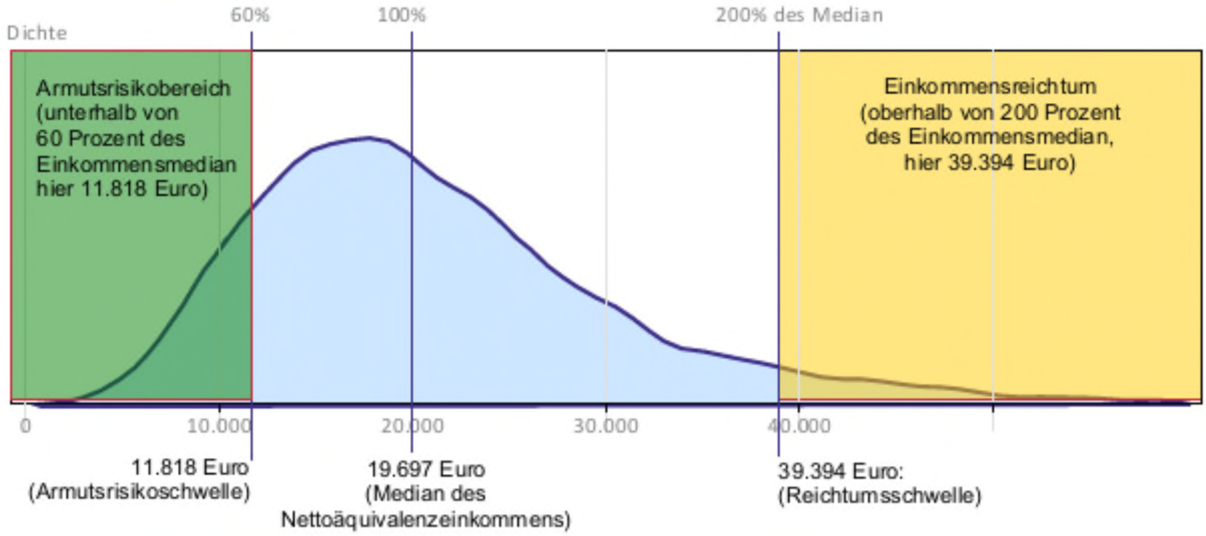

Abbildung 4: Einkommensverteilung und Einkommensarmut in Deutschland 2011 [1, Schaubild B.II.3.2]

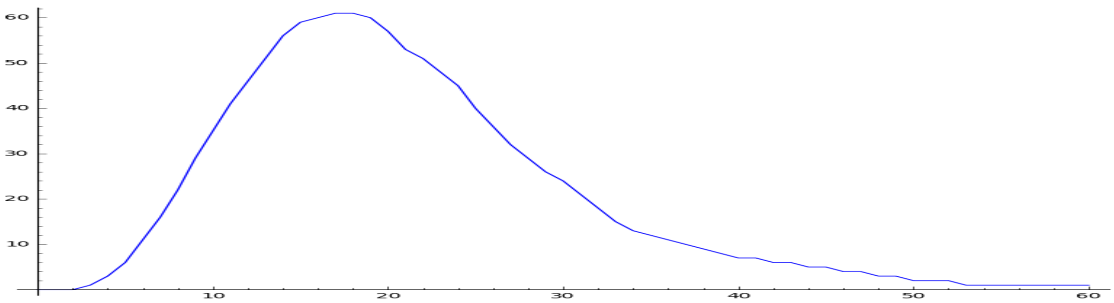

Abbildung 5: Einkommensverteilung leicht vergröbert

Man sieht, dass die Approximation ziemlich gut aussieht, natürlich mit um den Faktor 1000 gekürzten Einkommen, was wegen der Invarianz bei linearen Einkommenserhöhungen oder -kürzungen nach dem 1. Invarianzsatz, Hauptsatz 1, die Armutssituation nicht beeinflusst.

Mithilfe der SageMath-Funktionen `medi` und `poor` im Anhang A.1 und A.2 berechnen wir den Median zu 20 und die Zahl der Armutsgefährdeten zu 164. Das ergibt eine Armutsquote von $164/1240 = 0.132\ldots$, etwas niedriger als die im Armutsbericht [1] angegebene Quote von knapp über 14 %.

Für die Schweiz sieht das Bild – trotz allgemein unterstelltem höheren Wohlstand – genau so aus [17]; die offizielle Armutsquote schwankt in den letzten Jahren sogar zwischen 14 % und 16 %.

7 Theoretische Verteilungen

Es gibt keine einfache naheliegende Modellierung der empirischen Einkommensverteilung durch eine theoretische Verteilung. Hier werden nach rein optischen Gesichtspunkten theoretische Verteilungen untersucht, die empirisch beobachteten Verteilungen nahe kommen, siehe Abbildung 6.

Die mathematischen Begriffe aus der Wahrscheinlichkeitstheorie werden im folgenden so verwendet:

- Eine **Verteilungsfunktion**[6] ist eine Funktion

$$F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften:

(i) F wächst monoton, d. h., für $x \le y$ ist $F(x) \le F(y)$,

(ii) F ist rechtsseitig stetig, d. h.[7],

$$\lim_{t \searrow x} F(t) = F(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R},$$

(iii) F wächst von 0 bis 1, d. h.,

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

Insbesondere ist der Wertevorrat dann $F(\mathbb{R}) \subseteq [0,1]$.

- Eine **Dichtefunktion** ist eine integrierbare[8] Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0,\infty[\quad \text{mit} \quad \int_{\mathbb{R}} f = 1.$$

[6] Dazu gehört ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$, für welches das halboffene Intervall $]-\infty, x]$ die Wahrscheinlichkeit $F(x)$ hat.

[7] Der Limes von rechts (oder oben) wird hier mit dem Symbol $t \searrow x$ bezeichnet, entsprechend der Limes von links (oder unten) mit dem Symbol $t \nearrow x$.

[8] mindestens Lebesgue-integrierbar, aber die maßtheoretischen Spitzfindigkeiten sollen hier nicht vertieft werden

- Zu einer Dichtefunktion gehört eine Verteilungsfunktion F, die durch das Integral

$$F(x) := \int_{-\infty}^{x} f$$

definiert ist.

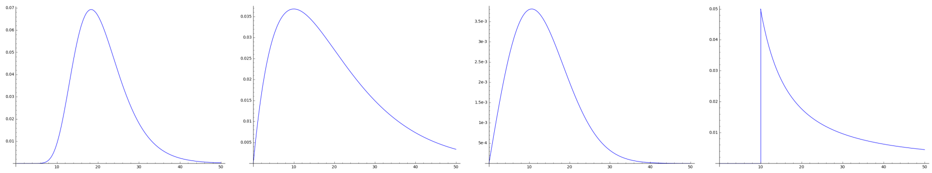

Abbildung 6: Die Graphen der exemplarischen Dichtefunktionen mit den Parametern aus (1)

Exemplarische Verteilungen

Exemplarisch werden vier Verteilungen betrachtet. Sie sind sämtlich 0 für negative Werte, wie es für eine Deutung als Eigentumsverteilung sinnvoll ist.

- Die Lognormalverteilung (oder logarithmische Normalverteilung) [12], abhängig von zwei Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$, mit Verteilungsfunktion

$$\mathcal{L}_{\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung ist, und mit Dichtefunktion

$$\ell_{\mu,\sigma}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x}\, e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

- Die Gammaverteilung [13], abhängig von zwei Parametern $p > 0$ und $b > 0$, mit Dichtefunktion

$$g_{p,b}(x) = \begin{cases} \frac{b^p}{\Gamma(p)}\, x^{p-1}\, e^{-bx} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases}$$

wobei Γ die Gammafunktion ist, die die Fakultät natürlicher Zahlen verallgemeinert[9]; die Verteilungsfunktion ist

$$\mathcal{G}_{p,b}(x) = \begin{cases} \frac{b^p}{\Gamma(p)} \int_0^x t^{p-1}\, e^{-bt}\, dt & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

[9] $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$

- Die Weibull-Verteilung [15], abhängig von zwei Parametern $k > 0$ („Formparameter") und $T > 0$ („Skalenparameter"), mit Verteilungsfunktion

$$\mathcal{W}_{k,T}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/T)^k} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0, \end{cases}$$

  und Dichtefunktion

$$w_{k,T}(x) = \begin{cases} \frac{k\,x^{k-1}}{T^k}\, e^{-(x/T)^k} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

  Im Spezialfall $k = 2$ ist das die Rayleigh-Verteilung $\mathcal{R}_\sigma$ [14] mit $\sigma = T/\sqrt{2}$.

- Die Pareto-Verteilung [16], abhängig von zwei Parametern $m > 0$ (der als Mindesteinkommen gedeutet werden kann) und $k > 0$ mit Verteilungsfunktion

$$\mathcal{P}_{m,k}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{m^k}{x^k} & \text{für } x \geq m, \\ 0 & \text{für } x < m, \end{cases}$$

  und Dichtefunktion[10]

$$\wp_{m,k}(x) = \begin{cases} \frac{k\,m^k}{x^{k+1}} & \text{für } x \geq m, \\ 0 & \text{für } x < m. \end{cases}$$

Die Lognormal- und die Pareto-Verteilung werden auch als realistische Einkommensverteilungen angesehen, siehe [12, 16], ohne dass es dafür eine zwingende theoretische Begründung aufgrund eines mathematischen Modells gibt.

SageMath-Code für die zugehörigen Dichtefunktionen ist in Anhang A.3 zu finden. Dort stehen auch die Plot-Kommandos, die die Graphen der vier Dichtefunktionen für jeweils typische Parameter, nämlich

$$\ell_{3,0.3}, \quad g_{2,0.2}, \quad w_{2,15}, \quad \wp_{10,0.5}. \tag{1}$$

in Abbildung 6 (von links nach rechts) visualisieren. Man beachte die unterschiedliche Skalierung von x- und y-Achse: Die Verteilungen sehen bei gleichmäßiger Skalierung sehr viel breiter aus.

Der Median

Der Median ist für beliebige Verteilungsfunktionen etwas kompliziert zu definieren. Für die aufgeführten beispielhaften Verteilungen spielt das allerdings keine Rolle, denn [5]:

Hilfssatz 1 *Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ eine stückweise stetige Dichtefunktion und $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ die zugehörige Verteilungsfunktion. Für $m \in \mathbb{R}$ gelte $F(m) = 1/2$ und $f(m) > 0$. Dann ist m der Median von F.*

[10] Symbol $\wp$ mit freundlicher Genehmigung von Karl Weierstraß ausgeliehen

Hilfssatz 2 *Für die Lognormalverteilung $\mathcal{L}_{\mu,\sigma}$ gilt:*

(i) *$\ell_{\mu,\sigma}$ ist Dichtefunktion und $\mathcal{L}_{\mu,\sigma}$ die zugehörige Verteilungsfunktion.*

(ii) *Der Median von $\mathcal{L}_{\mu,\sigma}$ ist e^{μ}.*

Beweis. Für (i) greifen wir auf die Standard-Normalverteilung mit Verteilungsfunktion Φ und Dichtefunktion

$$\Phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$$

zurück. Damit ist (für $x > 0$)

$$\mathcal{L}'_{\mu,\sigma}(x) = \Phi'\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x}\, e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \ell_{\mu,\sigma}(x).$$

Daher ist $\mathcal{L}_{\mu,\sigma}$ Stammfunktion von $\ell_{\mu,\sigma}$, und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell_{\mu,\sigma} = \int_0^{\infty} \ell_{\mu,\sigma} = \lim_{x\to\infty} \mathcal{L}_{\mu,\sigma}(x) - \lim_{x\to 0} \mathcal{L}_{\mu,\sigma}(x) = \lim_{y\to\infty} \Phi(y) - \lim_{y\to-\infty} \Phi(y) = 1,$$

also $\ell_{\mu,\sigma}$ Dichtefunktion.

(ii) Es ist $\mathcal{L}_{\mu,\sigma}(e^{\mu}) = \Phi(0) = 1/2$ und $\ell_{\mu,\sigma}(e^{\mu}) > 0$. $\diamond$

Im folgenden Hilfssatz kommt die („untere“) unvollständige Gammafunktion vor, die für $x > 0$ und $p > 0$ definiert ist durch die Formel

$$\gamma(p, x) \;=\; \int_0^x t^{p-1}\, e^{-t}\, dt.$$

Hilfssatz 3 *Für die Gammaverteilung $\mathcal{G}_{p,b}$ mit $p > 0$ und $b > 0$ gilt:*

(i) *$g_{p,b}$ ist Dichtefunktion und $\mathcal{G}_{p,b}$ die zugehörige Verteilungsfunktion.*

(ii) *Für $x > 0$ ist*

$$\mathcal{G}_{p,b}(x) = \frac{\gamma(p, bx)}{\Gamma(p)} = \mathcal{G}_{p,1}(bx).$$

(iii) *Der Median $M_{p,b}$ von $\mathcal{G}_{p,b}$ ist die Lösung x der Gleichung*

$$\gamma(p, bx) = \frac{\Gamma(p)}{2}.$$

(iv) *$M_{p,1} = b\, M_{p,b}$.*

Beweis. In (i) folgt die Eigenschaft einer Dichtefunktion per Substitution direkt aus

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{n-1}\, e^{-t}\, dt \;=\; b^n \cdot \int_0^{\infty} x^{n-1}\, e^{-bx}\, dx\,,$$

also aus der Definition der Gamma-Funktion. Da $\mathcal{G}_{p,b}$ direkt als Stammfunktion von $g_{p,b}$ definiert ist, ist es die zugehörige Verteilungsfunktion.

(ii) Die Substitution $s = bt$ ergibt für $x > 0$:

$$\mathcal{G}_{p,b}(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} \int_0^x t^{p-1}\, e^{-bt}\, dt = \frac{1}{\Gamma(p)} \underbrace{\int_0^{bx} s^{p-1}\, e^{-s}\, ds}_{\gamma(p,bx)} = \mathcal{G}_{p,1}(bx),$$

und das ist die Behauptung.

(iii) ist nur eine leichte Umformulierung von $\mathcal{G}_{p,b}(x) = 1/2$, und $g_{p,b}(x) > 0$ ist trivial.

(iv) Wegen (ii) ist $\mathcal{G}_{b,p}(x) = 1/2 \iff \mathcal{G}_{b,1}(bx) = 1/2$. $\diamond$

Hilfssatz 4 *Für die Weibull-Verteilung $\mathcal{W}_{k,T}$ gilt:*

(i) *$w_{k,T}$ ist Dichtefunktion und $\mathcal{W}_{k,T}$ die zugehörige Verteilungsfunktion.*

(ii) *Der Median von $\mathcal{W}_{k,T}$ ist $T\,\sqrt[k]{\ln 2}$.*

Beweis. (i) Durch Ableitung folgt unmittelbar, dass $\mathcal{W}'_{k,T}(x) = w_{k,T}(x)$ für $x \neq 0$. Also ist $\mathcal{W}_{k,T}$ Stammfunktion von $w_{k,T}$. Ferner geht $\mathcal{W}_{k,T}(x) \to 1$ für $x \to \infty$.

(ii) Einsetzen von $x = T\,\sqrt[k]{\ln 2}$ ergibt

$$\mathcal{W}_{k,T}(T\,\sqrt[k]{\ln 2}) = 1 - e^{-(\sqrt[k]{ln2})^k} = 1 - e^{-\ln 2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Außerdem ist $w_{k,T}(x) > 0$ für $x > 0$. $\diamond$

Hilfssatz 5 *Für die Pareto-Verteilung $\mathcal{P}_{m,k}$ gilt:*

(i) *$\wp_{m,k}$ ist Dichtefunktion und $\mathcal{P}_{m,k}$ die zugehörige Verteilungsfunktion.*

(ii) *Der Median von $\mathcal{P}_{m,k}$ ist $m\,\sqrt[k]{2}$.*

Beweis. (i) Durch Ableitung folgt unmittelbar, dass $\mathcal{P}'_{m,k}(x) = \wp_{m,k}(x)$ für $x \neq m$. Also ist $\mathcal{P}_{m,k}$ Stammfunktion von $\wp_{m,k}$. Ferner ist $\mathcal{P}_{m,k}(x) \to 1$ für $x \to \infty$.

(ii) Einsetzen von $x = m\,\sqrt[k]{2}$ ergibt

$$\mathcal{P}_{m,k}(m\,\sqrt[k]{2}) = 1 - \frac{m^k}{2\,\eta^k m^k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Außerdem ist $\wp_{m,k}(x) > 0$ für $x \geq m$. $\diamond$

Die Armutsquote

Das Analogon der Armutsquote in diesem Szenario einer theoretischen Verteilung sieht so aus:

Definition Sei F eine Verteilungsfunktion mit Median M_F und $\eta \in \mathbb{R}_+$. Dann heißt

$$q_\eta(F) = \lim_{x \nearrow \eta M_F} F(x)$$

die **η-Quote**[11] von F.

Diese Quoten werden jetzt für die exemplarischen Verteilungen in geänderter Reihenfolge (nach zunehmender Schwierigkeit) bestimmt – als Funktion von η und den Parametern der jeweiligen Verteilung.

I. Die Weibull-Verteilung

Satz 8 *Sei $\eta \in \mathbb{R}_+$. Dann hat die Weibull-Verteilung $\mathcal{W}_{k,T}$ die η-Quote*

$$q_\eta(\mathcal{W}_{k,T}) = 1 - 1/2^{\eta^k}. \tag{2}$$

Insbesondere ist diese vom Parameter T unabhängig.

Beweis. Da $\mathcal{W}_{k,T}$ im Intervall $\mathbb{R}_+$ stetig ist und den Median $T\sqrt[k]{\ln 2}$ hat, muss nur

$$\mathcal{W}_{k,T}(\eta T \sqrt[k]{\ln 2}) = 1 - e^{-(\eta \sqrt[k]{\ln 2})^k} = 1 - e^{-\eta^k \ln 2} = 1 - 2^{-\eta^k}$$

ausgerechnet werden. ◇

Für $\eta = 0$ ist die Quote (natürlich) $= 0$ und wächst dann mit zunehmendem η streng monoton (mit wachsendem η asymptotisch bis 1; dazwischen wird bei $\eta = 1$ der Wert 0.5 erreicht). Bei $\eta = 0.6$ und $k = 2$ ist die η-Quote für die Weibull-Verteilung also $1 - 1/2^{0.6^2} \approx 0.22$, egal, wie groß der Parameter T ist.

Abbildung 7 zeigt die Graphen der Dichtefunktion für festes $k = 2$ und zehn ausgewählte Werte des Parameters T. Die Verteilung schiebt sich bei wachsendem T immer weiter nach rechts, d. h., alle Einkommen werden angehoben – die Anhebung der unteren Einkommen (die ganz offensichtlich die Situation der Armen verbessert) verpufft scheinbar (nach der gängigen Definition der Armtsquote) durch das Mitwachsen des Medians. Auch in diesem theoretischen Szenario zeigt sich der Effekt:

Eine allgemeine Verbesserung der Einkommenssituation ändert möglicherweise nichts an der Armutsgefährdung, obwohl es danach allen besser geht.

Hält man dagegen T fest und variiert den Parameter k, so zeigt sich eine Kurvenschar wie in Abbildung 8: Mit wachsendem k wird die Verteilung immer schmaler, was einer Verteilung von oben nach unten entspricht. Die Armutsquote als Funktion von k ist durch Formel (2) gegeben, und wird in Abbildung 9 für $\eta = 0.6$ geplottet. Das Bild entspricht in diesem Fall der Erwartung.

[11] anders ausgedrückt: das Wahrscheinlichkeitsmaß des offenen Intervalls $]-\infty, \eta M_F[$

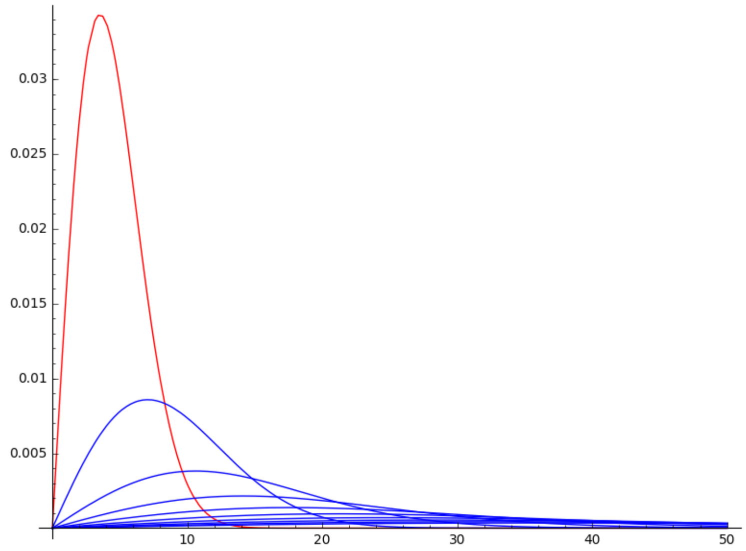

Abbildung 7: Die Graphen der Weibull-Dichtefunktion $\mathcal{W}_{k,T}$ für festes $k = 2$ und $T = 5$ (schmal, rote Kurve) bis $T = 50$ (breit) in Fünfer-Schritten

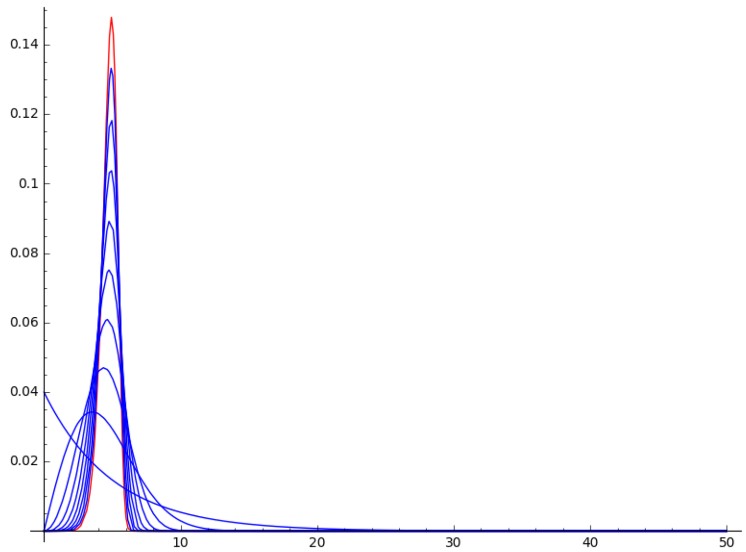

Abbildung 8: Die Graphen der Weibull-Dichtefunktion $\mathcal{W}_{k,T}$ für festes $T = 5$ und $k = 1$ (breit) bis $k = 10$ (schmal, rote Kurve) in Einer-Schritten

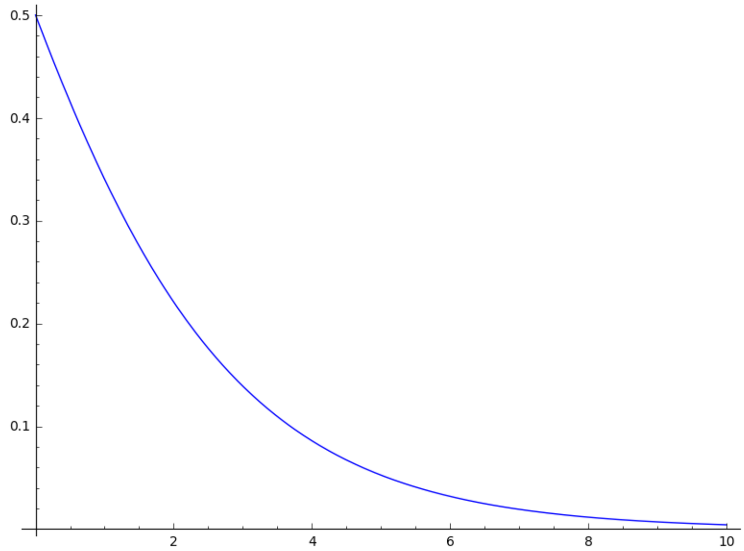

Abbildung 9: Die η-Quote der Weibull-Verteilung $\mathcal{W}_{k,T}$ in Abhängigkeit vom Parameter k (für festes $\eta = 0.6$)

II. Die Pareto-Verteilung

Satz 9 *Sei $\eta \in \mathbb{R}_+$. Dann hat die Pareto-Verteilung $\mathcal{P}_{m,k}$ die η-Quote*

$$q_\eta(\mathcal{P}_{m,k}) = 1 - 1/2\,\eta^k,$$

falls $\eta \geq 1/\sqrt[k]{2}$, und 0 sonst. Insbesondere ist diese vom Parameter m unabhängig.

Beweis. Da $\mathcal{P}_{m,k}$ im Intervall $[m, \infty[$ stetig ist und den Median $m\,\sqrt[k]{2}$ hat, muss nur

$$\mathcal{P}_{m,k}(\eta\, m\, \sqrt[k]{2}) = \begin{cases} 1 - \frac{m^k}{2\, m^k\, \eta^k} = 1 - \frac{1}{2\,\eta^k}, & \text{falls } \eta\, m\, \sqrt[k]{2} \geq m, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ausgerechnet werden. $\diamond$

Hier bleibt die Quote als Funktion von η auf 0 bis zur Stelle $\eta = 1/\sqrt[k]{2}$, ab wo sie streng monoton wächst (asymptotisch bis 1). Die folgende Tabelle zeigt zu gegebenem k, ab welchem Wert von η die η-Quote > 0 ist:

k	0.5	1.0	1.5	2.0
$1/\sqrt[k]{2}$	0.25	0.5	≈ 0.63	≈ 0.71

Mit wachsendem k würde der Wert in der zweiten Zeile gegen 1 gehen. Wegen der Äquivalenz (für $0 < \eta < 1$ und somit $\ln \eta < 0$)

$$\eta \geq 1/\sqrt[k]{2} \iff \eta\,\sqrt[k]{2} \geq 1 \iff 2\,\eta^k \geq 1 \iff k\,\ln\eta \geq \ln\frac{1}{2} \iff k \leq \frac{\ln 1/2}{\ln \eta}$$

ist bei $\eta = 0.6$ eine η-Quote $q > 0$ nur für $k \leq \ln 0.5/ \ln 0.6 \approx 1.36$ möglich, für größere Werte von k ist sie 0. Abbildung 10 zeigt, dass die η-Quote (für festes $\eta = 0.6$) als Funktion von k im Intervall $k \in]0, \ln 0.5/ \ln 0.6]$ fast linear von $1/2$ bis 0 abnimmt.

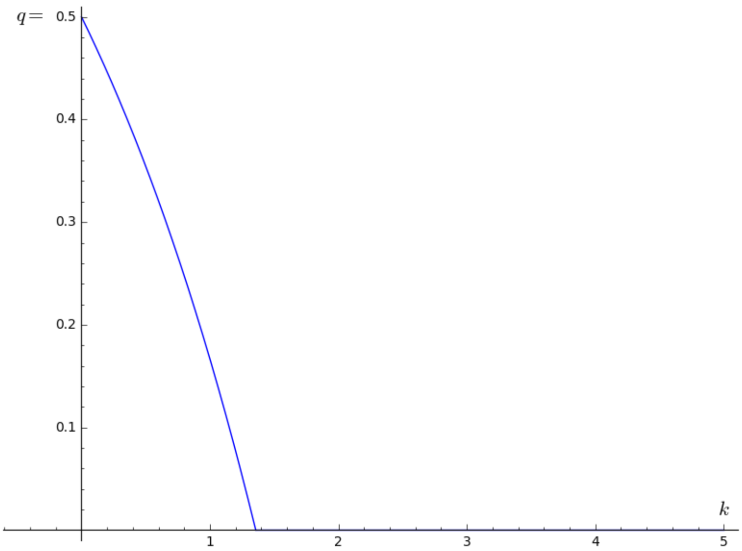

Abbildung 10: Die η-Quote der Pareto-Verteilung $\mathcal{P}_{m,k}$ in Abhängigkeit vom Parameter k (für festes $\eta = 0.6$)

Interpretation Folgen die Einkommen einer Pareto-Verteilung, so ändert eine Erhöhung des Mindesteinkommens m nichts an der Armutsquote. Durch Erhöhung des Parameters k, was eine Ausdünnung des rechten Endes der Verteilung bewirkt, siehe Abbildung 11, also eine Absenkung der Zahl von Beziehern höherer Einkommen und eine Zunahme niedriger Einkommen, wird die Armutsquote schnell auf 0 vermindert. Der Grund dafür ist das gleichzeitige Absinken des Medians $m\sqrt[k]{2}$ bis nahe an das Mindesteinkommen m.

In diesem Beispiel bewirkt eine generelle Verminderung der Einkommen eine *Absenkung* der Armutsgefährdung.

Bei festem k und variablem m ist die η-Quote nach Satz 9 konstant. Abbildung 12 zeigt eine Schar von zehn Pareto-Dichtefunktionen mit festem $k = 1$ und veränderlichem m in zehn Zweierschritten von 2 bis 20. Auch hier lässt sich der wachsende Parameter m als Verbesserung der gesamten Einkommenssituation interpretieren – unmittelbar als Anhebung des Grundeinkommens, die indirekt auch eine Anhebung aller Einkommen bewirkt, wie die Grafik suggeriert.

In diesem Beispiel ändert die allgemeine Verbesserung der Einkommenssituation wiederum nichts an der Armutsgefährdung, obwohl es danach allen besser geht.

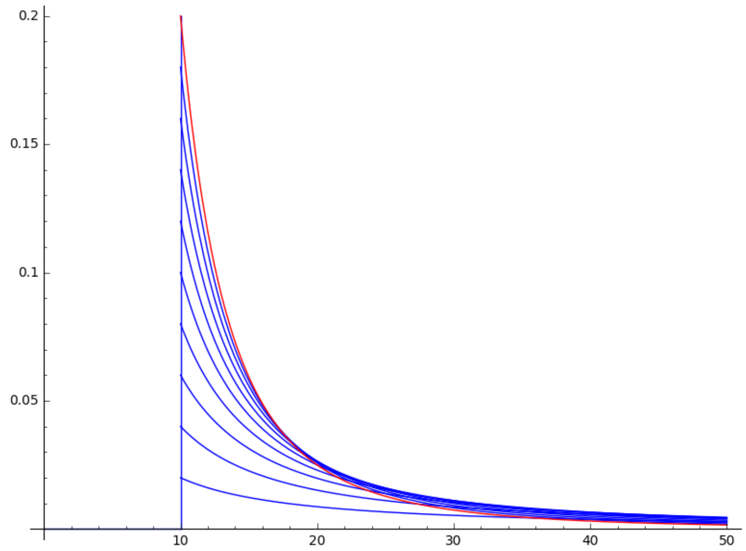

Abbildung 11: Die Graphen der Pareto-Dichtefunktion $\wp_{m,k}$ für $m = 10$ und $k = 0.2$ (niedrig und breit) bis $k = 2.0$ (hoch und schmal, Kurve in rot)

Für $k = 1$ und festes $\eta \geq 1/2$ ist die η-Quote der Pareto-Verteilung konstant $= 1 - 1/2\eta$; im Falle $\eta = 0.6$ ist dieser Wert $1/6$, liegt also konstant bei etwa 17 %.

III. Die Lognormalverteilung

Satz 10 *Sei $\eta \in \mathbb{R}_+$. Dann hat die Lognormalverteilung $\mathcal{L}_{\mu,\sigma}$ die η-Quote*

$$q_\eta(\mathcal{L}_{\mu,\sigma}) = \Phi(\ln \eta/\sigma).$$

Insbesondere ist diese vom Parameter μ unabhängig.

Beweis. Da $\mathcal{L}_{\mu,\sigma}$ im Intervall $]0, \infty[$ stetig ist und den Median e^μ hat, muss nur

$$\mathcal{L}_{\mu,\sigma}(\eta e^\mu) = \Phi\left(\frac{\ln(\eta e^\mu) - \mu}{\sigma}\right)$$

ausgerechnet werden, und $\ln(\eta e^\mu - \mu) = \ln \eta + \mu - \mu$. $\diamond$

Für $\eta = 0$ ist die Quote $q_\eta(\mathcal{L}_{\mu,\sigma}) = 0$[12]. Ab da wächst sie als Funktion von η monoton (asymptotisch bis 1) und nimmt dazwischen für $\eta = 1$ den Wert $\Phi(0) = 1/2$ an.

Abbildung 13 vermittelt einen Eindruck davon, wie sich die Lognormalverteilung bei festem Parameter μ (hier $\mu = 3$) und variablem Parameter σ ändert: Bei Vergrößerung

[12] $\lim_{y\to-\infty} \Phi(y) = 0$

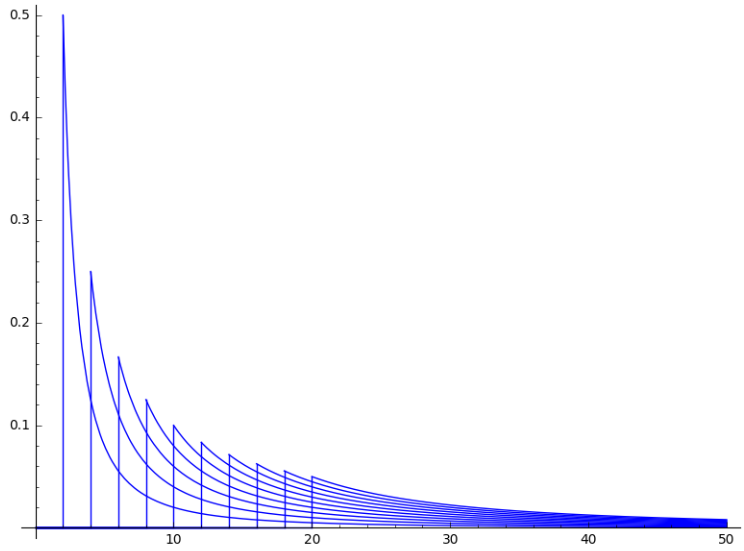

Abbildung 12: Die Graphen der Pareto-Dichtefunktion $\wp_{m,k}$ für $k = 1$ und $m = 2$ (schmal und hoch) bis $m = 20$ (breit und niedrig)

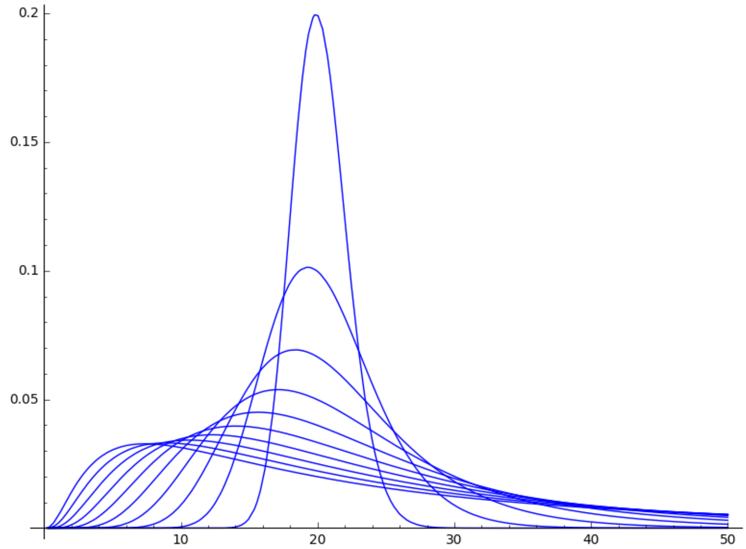

Abbildung 13: Die Graphen der Lognormal-Dichtefunktion $\ell_{\mu,\sigma}$ für $\mu = 3$ und $\sigma = 0.1$ (schmal) bis $\sigma = 1.0$ (breit)

von σ verbreitert und verflacht sich also der Graph der Dichtefunktion, die Einkommensverteilung wird somit auseinander gezogen, die Ungleichheit nimmt zu. Der optische Eindruck deutet auf eine Verschlechterung der Armutssituation hin, es sollte also mit größer werdendem Parameter σ die Armut zunehmen. Abbildung 14 bestätigt diesen Eindruck (bei fest gewähltem Armutskoeffizienten $\eta = 0.6$). Für $\sigma \to \infty$ würde die η-Quote asymptotisch streng monoton gegen $\Phi(0) = 1/2$ steigen.

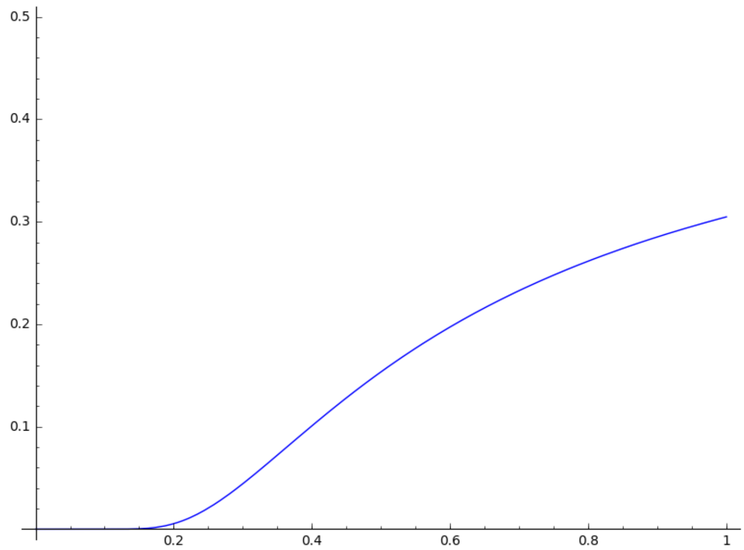

Abbildung 14: Die Abhängigkeit der Armutsquote vom Parameter σ für die Lognormalverteilung $\mathcal{L}_{\mu,\sigma}$ bei festem Armutskoeffizienten $\eta = 0.6$

Anders ist es bei Variation des Lageparameters μ, die die η-Quote nach Satz 10 invariant lässt. Abbildung 15 suggeriert, dass sich mit wachsendem μ die Armutssituation verbessert: Es gibt weniger niedrige und mehr hohe Einkommen, eine Situation, wie wir sie schon bei der Pareto-Verteilung hatten.

Für lognormal verteilte Einkommen verhält sich die Armutsquote
bei Variation des Breiteparameters σ plausibel.
Bei Variation des Lageparameters μ hingegen reagiert sie nicht
auf die damit verbundene Veränderung der Armutssituation.

IV. Die Gammaverteilung

Für die η-Quote der Gammaverteilung ist keine einfache Formel bekannt. Immerhin gilt:

Satz 11 *Sei $\eta \in \mathbb{R}_+$. Dann ist die η-Quote von $\mathcal{G}_{p,b}$ vom Parameter b unabhängig.*

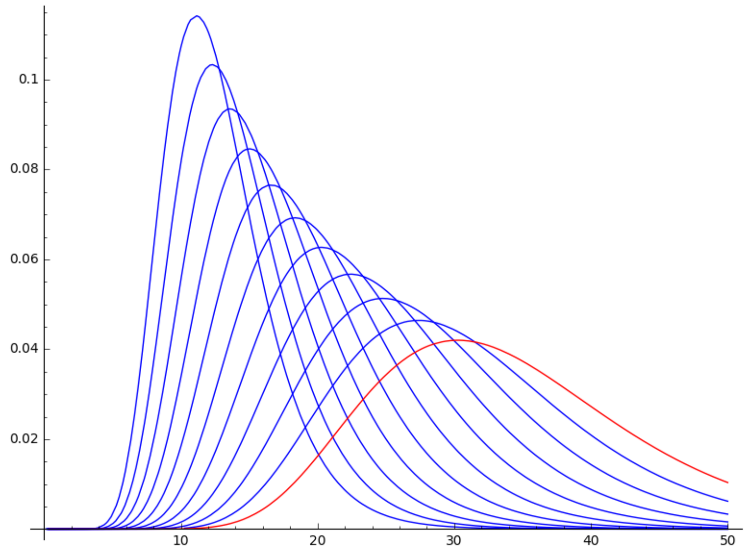

Abbildung 15: Die Graphen der Lognormal-Dichtefunktion $\ell_{\mu,\sigma}$ für festes $\sigma = 0.5$ und veränderliches $\mu = 2.5$ (schmal und hoch) bis $\mu = 3.5$ (niedrig und breit, Kurve in rot)

Beweis. Mit der Bezeichnung $M_{p,b}$ für den Median von Hilfssatz 3 folgt aus den dortigen Aussagen

$$q_\eta(\mathcal{G}_{p,b}) = \mathcal{G}_{p,b}(\eta M_{p,b}) = \mathcal{G}_{p,b}\left(\frac{\eta}{b}\, M_{p,1}\right) = \mathcal{G}_{p,1}(\eta M_{p,1}) = q_\eta(\mathcal{G}_{p,1}),$$

diese Quote ist also von b unabhängig. $\diamond$

Abbildung 16 vermittelt einen Eindruck davon, wie sich die Gammaverteilung bei festem Parameter p (hier $p = 2$) und variablem Parameter b ändert: Bei Vergrößerung von b verengt und versteilt sich also der Graph der Dichtefunktion, die Einkommensverteilung wird somit zusammengerückt, die Ungleichheit nimmt ab. Trotzdem deutet der optische Eindruck auf eine Verschlechterung der Armutssituation hin, da es bei größerem b mehr Arme und weniger Reiche gibt – es sollte also mit wachsendem Parameter b die Armut zunehmen und nicht etwa konstant bleiben.

Für die Abhängigkeit der η-Quote der Gammaverteilung vom Parameter p geben die bisherigen Überlegungen keine brauchbare Formel her. Abbildung 17 legt wieder nahe, dass mit wachsendem p die Armut abnimmt: Es gibt immer weniger niedrige und immer mehr hohe Einkommen. Mangels expliziter Formel hilft eine numerische Auswertung, die zu Abbildung 18 führt.

Der Algorithmus für diese numerische Auswertung verläuft so (wobei man wegen Satz 11 ohne Einschränkung $b = 1$ annehmen darf); der zugehörige SageMath-Code steht im Anhang A.4:

- Der Parameter $\eta = 0.6$ (exemplarisch) wird fixiert.

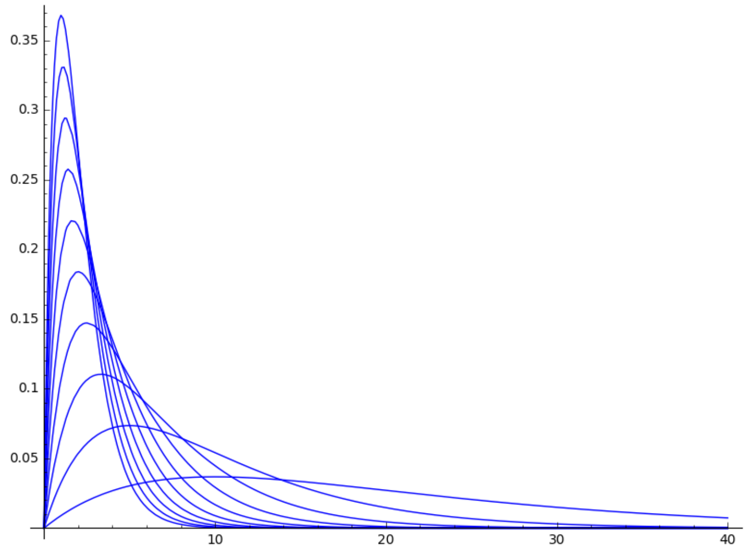

Abbildung 16: Die Graphen der Gamma-Dichtefunktion $g_{p,b}$ für $p = 2$ und $b = 0.1$ (breit) bis $b = 1.0$ (spitz)

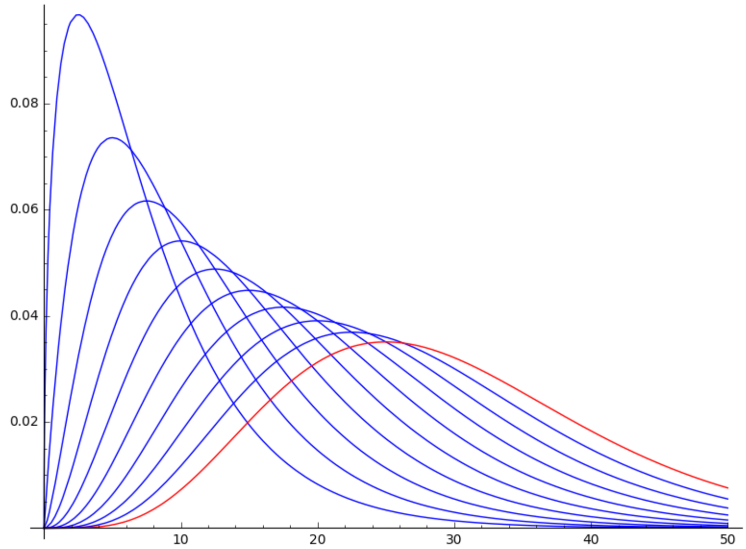

Abbildung 17: Die Graphen der Gamma-Dichtefunktion $g_{p,b}$ für $b = 0.2$ und $p = 1.5$ (schmal) bis $p = 6.0$ (breit, rote Kurve)

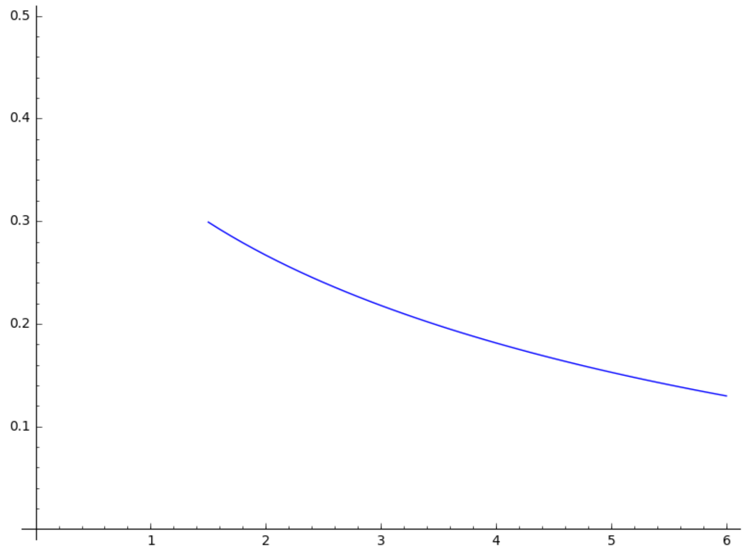

Abbildung 18: Die Abhängigkeit der Armutsquote vom Parameter p für die Gammaverteilung $\mathcal{G}_{p,b}$ bei festem Armutskoeffizienten $\eta = 0.6$

- Die Liste der Kurvenpunkte $(p, q_\eta(\mathcal{G}_{p,b}))$ wird als leere Liste initialisiert.
- Für jedes p – exemplarisch für $p = 1.5$ bis 6.0 in 0.1-er-Schritten:
  1. Die Gleichung $\gamma(p, x) = \Gamma(p)/2$ wird nach x aufgelöst – x ist dann der Median von $\mathcal{G}_{p,1}$.
  2. Aus der η-Quote $y = \gamma(p, \eta\, x)/\Gamma(p) = 1 - \Gamma(p, \eta\, x)/\Gamma(p)$ wird der Punkt (p, y) gebildet und an die Punktliste angehängt.
- Die Punkte der Liste werden zu einem (stückweise linearen) Graphen verbunden.

Das Ergebnis entspricht in diesem Fall wieder der Erwartung: Mit wachsendem p nimmt die η-Quote ab.

Für gammaverteilte Einkommen verhält sich die Armutsquote
bei Variation des Parameters p plausibel.
Bei Variation des Parameters b hingegen reagiert sie nicht
auf die damit einhergehende Veränderung der Armutssituation.

Invarianz

Bei allen vier Beispielen von stetigen Verteilungen war eine Unabhängigkeit der Armutsquote (hier „η-Quote“ genannt) von gewissen Parameteränderungen zu beobachten, die auf eine allgemeine Verbesserung der Armutssituation hinauslaufen. Zusammengefasst:

Invarianzsatz 3 *Bei folgenden stetigen Verteilungen ist die η-Quote vom jeweils angegeben Parameter unabhängig:*

(i) *bei der Lognormalverteilung $\mathcal{L}_{\mu,\sigma}$ vom Parameter μ,*

(ii) *bei der Gammaverteilung $\mathcal{G}_{p,b}$ vom Parameter b,*

(iii) *bei der Weibull-Verteilung $\mathcal{W}_{k,T}$ vom Parameter T,*

(iv) *bei der Pareto-Verteilung $\mathcal{P}_{m,k}$ vom Parameter m.*

8 Diskretisierte Verteilungen

Die im vorigen Abschnitt 7 analysierten stetigen Verteilungen können nur als idealisierte Modelle von Einkommensverteilungen der realen Welt gelten. Denn letztere sind, da die Bevölkerung endlich ist, grundsätzlich diskret, siehe die Abschnitte 2 und 6. Aber eine reale diskrete Verteilung kann approximativ einer der stetigen Verteilungen entsprechen, und die Auswirkungen von Parameteränderungen dieser stetigen Verteilung kann im diskreten Fall untersucht werden.

Konstruktion einer passenden Einkommensverteilung

Wie bildet man nun zu einer solchen theoretischen Verteilung eine entsprechende Einkommensverteilung? Dazu wird generisch eine diskrete Dichtefunktion

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{mit} \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} f(i) = 1 \tag{3}$$

zugrunde gelegt.

Daraus wird eine Einkommensverteilung für eine Bevölkerung der Größe N konstruiert: Die Wahrscheinlichkeit für das Einkommen i soll idealerweise $f(i)$ sein, die Häufigkeit des Einkommens i also $N \cdot f(i)$. Wir setzen daher die Zahl der Individuen mit Einkommen i als $h(i) := \lfloor N \cdot f(i) \rceil$ fest, also ganzzahlig gerundet. Dann ist

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} h(i) \approx \sum_{i\in\mathbb{N}} N \cdot f(i) = N\,;$$

durch den Rundungseffekt wird der Wert N nicht notwendig exakt getroffen, d. h., die konstruierte Bevölkerung hat nicht notwendig genau die Größe N. Darauf kommt es aber gar nicht an, und es schadet auch nicht, wenn die $f(i)$ in der Summe nicht exakt 1 ergeben. Wenn wir für f nämlich die Einschränkung einer der oben aufgezählten Dichtefunktionen auf ganzzahlige Argumente nehmen, wissen wir (ohne weitere Anstrengung) nur, dass ihr Integral über die gesamte positive reelle Achse 1 ist, nicht aber notwendigerweise die Summe in (3). Wichtig ist letztlich nur, dass das Histogramm der erzeugten hypothetischen Einkommensverteilung die angestrebte Form hat, und mit diesem Histogramm wird wie in Abschnitt 6 weitergearbeitet.

Um ein passendes Abbruchkriterium für einen allgemeinen Algorithmus zur Hand zu haben, nehmen wir noch an, dass $f(x)$ für $x \geq b$ monoton fällt, also ab einer Schranke b, was für die oben aufgezählten Dichtefunktionen der Fall ist, siehe Anhang B. Dann ist $h(i) = 0$ für $i \geq i_0$, wenn $h(i_0) = 0$ und $i_0 \geq b$, d.h., die Durchführung kann an dieser Stelle abgebrochen werden.

Der Algorithmus läuft dann zu einer generischen Dichtefunktion f mit „Monotonie-Schranke" b für eine Bevölkerung der Zielgröße N so ab:

- Initialisierung:
  - $h =$ eine leere Liste,
  - $i = 0$ als laufender Index, der das Einkommen repräsentiert,
  - `go_on` als Anzeiger, dass das Abbruchkriterium noch nicht erreicht ist.
- Schleife, in der i bis (mindestens) zum Maximaleinkommen inkrementiert wird: Solange `go_on = True`:
  - Setze $x = \lfloor N \cdot f(i) \rceil$.
  - Falls $x = 0$ und $i \geq b$, wird kein Einkommen $\geq i$ mehr vorkommen, die Schleife kann mit `go_on = False` abgebrochen werden.
  - Andernfalls wird der Wert x an die Liste h angehängt und steht dann an der Stelle i; das bedeutet, dass das Einkommen i genau x-mal vorkommt. Für den nächsten Schleifendurchlauf wird i inkrementiert.

SageMath-Code für dieses Vorgehen steht im Anhang A.5.

Abhängigkeit von Parametern

Um die Auswirkungen kleiner Veränderungen der Einkommensverteilung auf die Armutsquote zu analysieren, werden in diesem Abschnitt Parameter, von denen die theoretischen Verteilungen aus Abschnitt 7 abhängen, in kleinen Schritten verändert. Dabei zeigt sich oft ein erratisches Verhalten der Armutsquote, im Gegensatz übrigens zum Gini-Koeffizienten [4, 11], der hier als Beispiel für ein wesentlich zuverlässigeres Maß herangezogen wird.

> Der Gini-Koeffizient liegt – wie auch die Armutsquote – zwischen 0 und 1. Er ist ein Maß für die Ungleichheit der Verteilung. Der Wert 1 bedeutet maximale Ungleichheit, d. h., alle haben das Einkommen 0 bis auf eine Person, die ein Einkommen > 0 hat, ein extremer Spezialfall der Zweiklassen-Gesellschaft aus Abschnitt 4. Der Wert 0 bedeutet völlige Gleichheit, d. h., alle haben ein gleich hohes Einkommen, die Einkommensverteilung ist perfekt kommunistisch im Sinne von Abschnitt 4. Während der Gini-Koeffizient diese beiden Extremfälle also optimal unterscheidet, ist bei beiden die Armutsquote 0.

Um die Abhängigkeit von den Parametern numerisch zu analysieren, werden die jeweiligen Verteilungen für 100 verschiedene Werte eines relevanten Parameters diskretisiert und ausgewertet. Dazu wird generisch eine Funktion $H(a, x)$ mit Parameter a aus einer dieser Dichtefunktionen gebildet:

$$H(a, \bullet) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ .$$

Dann wird dieser Parameter a in 100 Stufen (von 1 bis 100) variiert. Eine anschauliche Vorstellung von der Auswirkung dieser Parameter-Änderung auf die Form der Verteilung geben die Abbildungen der Kurvenscharen im Abschnitt 7. Schließlich wird für alle 100 Werte des Parameters a nach dem obigen Algorithmus eine passende (diskrete) Einkommensverteilung konstruiert und die jeweils daraus resultierende Armutsquote (stets für den Armutskoeffizienten $\eta = 0.6$) sowie auch der Gini-Koeffizient berechnet. Diese werden jeweils als Funktionen von a mithilfe der Sage-Kommandos aus Anhang A.6 geplottet.

Beispiel: Lognormalverteilung $\mathcal{L}_{\mu,\sigma}$ bei Änderung von σ

Für das erste Beispiel wählen wir bei der Lognormalverteilung den festen Parameter $\mu = 3$. Die Dichtefunktion $\ell_{3,\sigma}(x)$ fällt nach Anhang B monoton für $x \geq e^{3-\sigma^2} \approx 20/e^{\sigma^2}$. Wir setzen $H(a, x) = \ell_{3,0.01a}(x)$, also $a = 100\,\sigma$. Bei Vergrößerung des Parameters a (bzw. σ) verbreitert und verflacht sich also der Graph der Dichtefunktion, die Einkommensverteilung wird somit auseinander gezogen, die Ungleichheit nimmt zu, siehe Abbildung 13. Der optische Eindruck scheint auf eine Verschlechterung der Armutssituation hinzudeuten, es sollte also mit größer werdendem Parameter a die Armut zunehmen. Im stetigen Fall verhielt sich die formal definierte Armutsquote dieser Erwartung entsprechend.

Nun variieren wir den Parameter a von 1 bis 100 in ganzzahligen Schritten, also σ in 0.01-er-Schritten von 0.01 bis 1.0, und untersuchen, wie sich die Armutsquote für die zugehörige passende Einkommensverteilung dabei ändert. Für jeden Schritt werden die jeweilige Armutsquote und der Gini-Koeffizient bestimmt. Das Ergebnis wird geplottet, siehe Abbildung 19, und zeigt die erwartete Abhängigkeit in Übereinstimmung mit dem stetigen Modell: Die Armutsquote wächst von 0 bis etwa 0.3. Bei den sehr schmalen Einkommensverteilungen bis etwa $\sigma = 0.15$ liegt die Armutsquote bei 0.

Auch der Gini-Koeffizient verhält sich erwartungsgemäß, wie Abbildung 20 zeigt, und wächst fast linear von 0 bis etwa 0.5, reagiert aber im Gegensatz zur Armutsquote sofort auf die Umverteilung der Einkommen.

Sind die Einkommen in etwa lognormal verteilt, so ändert sich die Armutsquote bei Änderung des Parameters σ auch im diskreten Modell plausibel.

Beispiel: Lognormalverteilung $\mathcal{L}_{\mu,\sigma}$ bei Änderung von μ

Als nächstes Beispiel wird die Lognormalverteilung bei festem Parameter $\sigma = 0.5$ und variablem Parameter μ diskretisiert. Im stetigen Modell ist die Armutsquote von μ un-

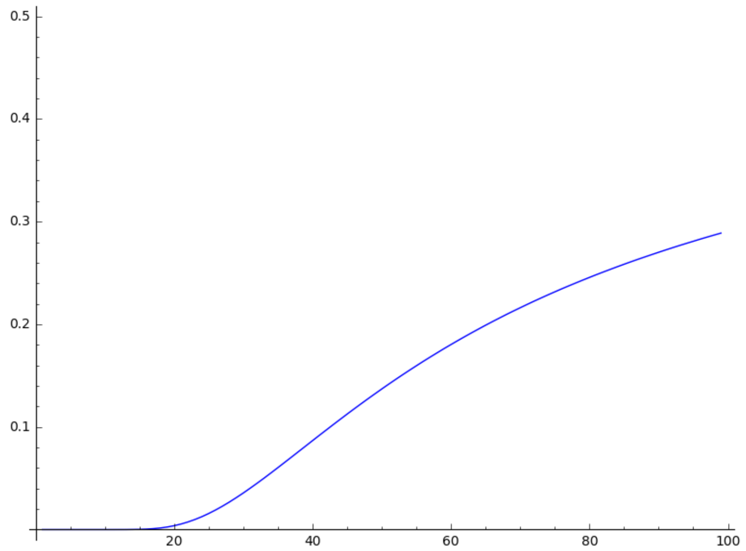

Abbildung 19: Die Abhängigkeit der Armutsquote vom Parameter $a = 100\,\sigma$ für die diskretisierte Lognormalverteilung $\mathcal{L}_{\mu,\sigma}$ bei festem $\mu = 3.0$ und festem Armutskoeffizienten $\eta = 0.6$

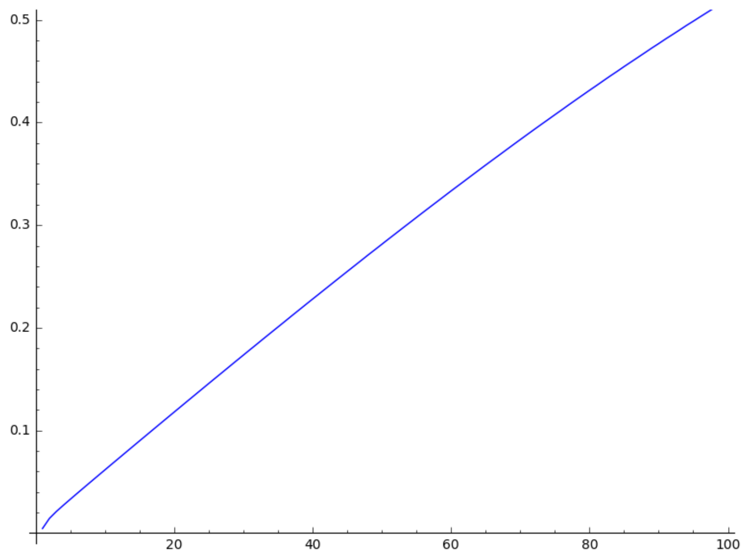

Abbildung 20: Die Abhängigkeit des Gini-Koeffizienten vom Parameter a für die Lognormalverteilung $\mathcal{L}_{3.0,0.01\,a}$

abhängig, während die Kurvenschar in Abbildung 15 für wachsendes μ eine Verbesserung der Armutssituation suggeriert. Mit $H(a,x) = \ell_{0.05\,a,0.5}(x)$ werden wieder die Armutsquoten und Gini-Koeffizienten bestimmt, siehe Abbildung 21 und 22.

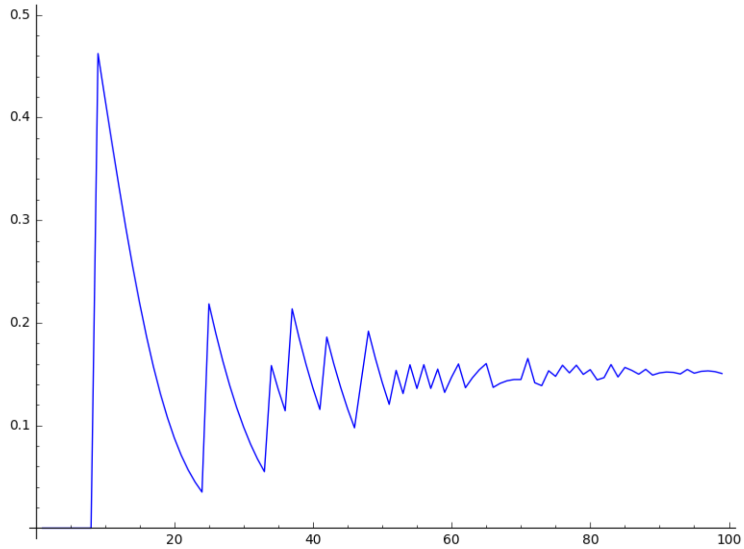

Abbildung 21: Die Abhängigkeit der Armutsquote vom Parameter $a = 20\,\mu$ für die diskretisierte Lognormalverteilung $\mathcal{L}_{\mu,\sigma}$ bei festem $\sigma = 0.5$ und festem Armutskoeffizienten $\eta = 0.6$

Die Armutsquote pendelt wild hin und her und scheint sich für wachsendes a auf einen Wert um 0.15 einzupendeln, der dem theoretischen Wert $\Phi(\ln \eta/\sigma)$ entspricht. Der Gini-Koeffizient bleibt nach anfänglichem leichtem Wachstum in etwa konstant bei 0.27.

Sind die Einkommen in etwa lognormal verteilt, so ändert sich die Armutsquote
bei Änderung des Parameters μ erratisch,
während der Gini-Koeffizient fast konstant bleibt.

Beispiel: Gammaverteilung $\mathcal{G}_{p,b}$ bei Änderung von b

Für das nächste Beispiel wählen wir bei der Gammaverteilung den Parameter $p = 2$ fest. Im stetigen Modell ist die Armutsquote dann nach Satz 11 konstant ≈ 0.27 (nach numerischer Berechnung). Die Dichtefunktion vereinfacht sich für Argumente $x > 0$ zu

$$g_{2,b}(x) = b^2\, x\, e^{-bx}\,.$$

Sie fällt monoton für $x \geq 1/b$, siehe Anhang B. Wir setzen $H(a,x) = g_{2,0.01a}(x)$, also $a = 100\,b$, und plotten die Dichtefunktionen für die zehn Stufen des Parameters $a = 10, \ldots, 100$, also von $b = 0.1$ bis $b = 1.0$, siehe Abbildung 16. Bei *Verkleinerung* des

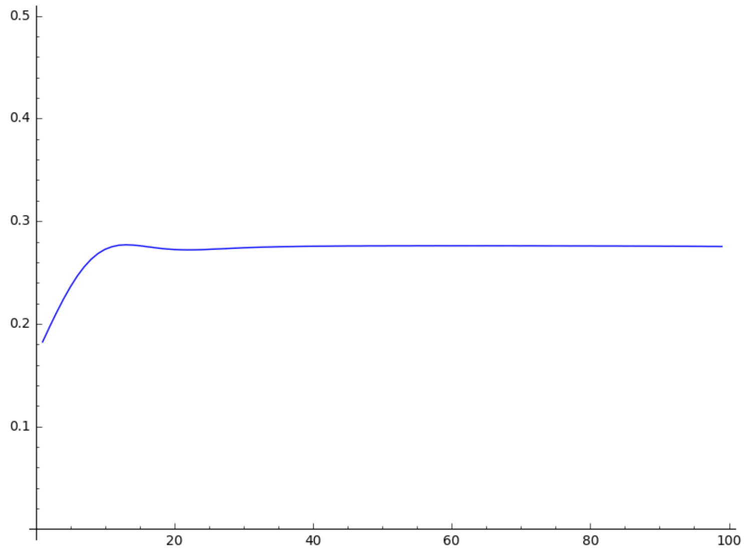

Abbildung 22: Die Abhängigkeit des Gini-Koeffizienten vom Parameter a für die Lognormalverteilung $\mathcal{L}_{0.05\,a,0.5}$

Parameters a (bzw. b) verbreitert und verflacht sich also der Graph der Dichtefunktion, die Einkommensverteilung wird somit auseinander gezogen. Intuitiv scheint das auf eine Verbesserung der Armutssituation hinzudeuten, da die unteren Einkommen angehoben werden. Es sollte also mit kleiner werdendem Parameter a die Armut abnehmen. Allerdings scheint die Ungleichheit bei kleinerem Parameter, entsprechend der breiteren Verteilung, zuzunehmen.

Wieder variieren wir den Parameter a von 1 bis 100 in ganzzahligen Schritten, also b in 0.01-er-Schritten von 0.01 bis 1.0, und untersuchen, wie sich die Armutsquote für die zugehörige passende Einkommensverteilung dabei ändert. Für jeden Schritt werden die jeweilige Armutsquote und der Gini-Koeffizient bestimmt.

Das Ergebnis wird geplottet, siehe Abbildung 23, und zeigt wieder eine sehr irreguläre Abhängigkeit: Die Armutsquote springt hin und her. Außerdem nimmt die Armutsquote für kleiner werdendes a auch nicht ersichtlich ab, sondern scheint eher um einen konstanten Wert von etwa 0.27 zu schwanken, der dem Wert aus dem stetigen Modell entspricht. Für eine vernünftig definierte Armutsquote würde man einen viel glatteren Verlauf bei einer solchen monotonen kontinuierlichen Parameteränderung erwarten, so wie es der Gini-Koeffizient in Abbildung 24 zeigt, der wie erwartet mit der Verkleinerung von a zunimmt, d. h., die Ungleichheit nimmt zu, entsprechend der oben bemühten Intuition.

Die irregulären Ausschläge der Armutsquote sind natürlich auf das sprunghafte Verhalten des Medians zurückzuführen und werden durch die – durch die obige Konstruktion erzeugte – relativ grobe diskrete Verteilung so deutlich hervorgehoben. Aber auch bei größeren Bevölkerungszahlen und feiner abgestuften Einkommen ist dieser Effekt durch-

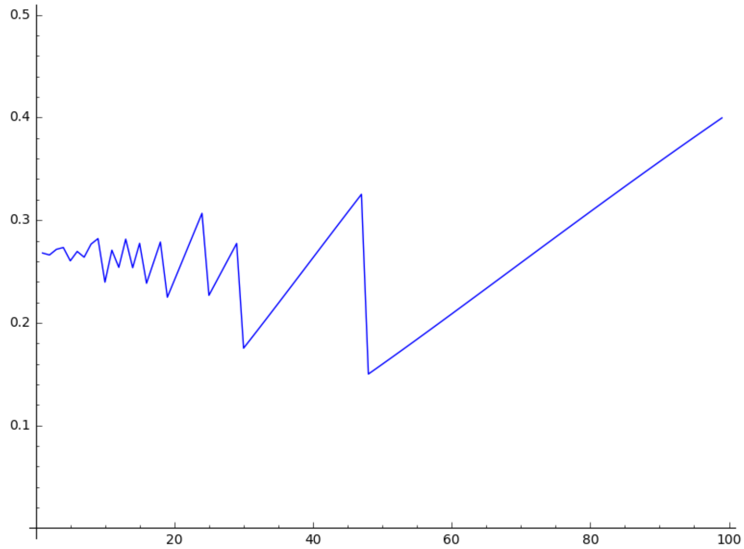

Abbildung 23: Die Abhängigkeit der Armutsquote vom Parameter $a = 100\,b$ für die Gammaverteilung $\mathcal{G}_{2.0,b}$ bei festem Armutskoeffizienten $\eta = 0.6$

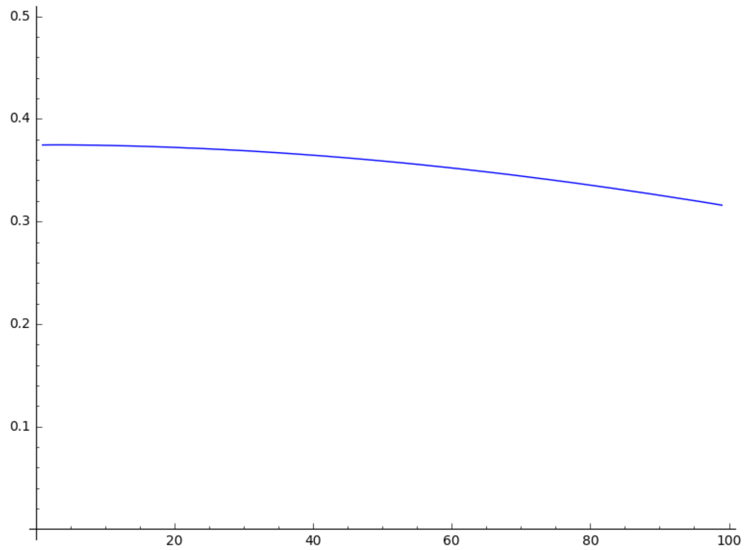

Abbildung 24: Die Abhängigkeit des Gini-Koeffizienten vom Parameter $a = 100\,b$ für die Gammaverteilung $\mathcal{G}_{2.0,b}$ bei festem Armutskoeffizienten $\eta = 0.6$

aus noch relevant, besonders wenn sich das Einkommen für nicht zu kleine Gruppen ändert. Und immerhin zeigt der Gini-Koeffizient auch unter diesen Umständen kein so irritierendes Verhalten.

Die im Vergleich zur Lognormal-Verteilung anscheinend größere Armutsquote ist allerdings plausibel, weil es dort keine ganz kleinen Einkommen gibt; der Graph der Dichtefunktion startet bei 0 waagerecht.

Beispiel: Gammaverteilung $\mathcal{G}_{p,b}$ bei Änderung von p

Jetzt wird bei der Gammaverteilung der Parameter $b = 0.2$ fest gewählt und die Abhängigkeit vom Parameter p untersucht. Abbildung 17 zeigt, dass die Armutssituation mit wachsendem p besser wird, und Abbildung 18 bildet dieses Verhalten im stetigen Modell nach. Mit $H(a,x) = g_{1+0.1\,a,0.2}(x)$ werden wieder die Armutsquote und der Gini-Koeffizient bestimmt, siehe Abbildung 25 und 26.

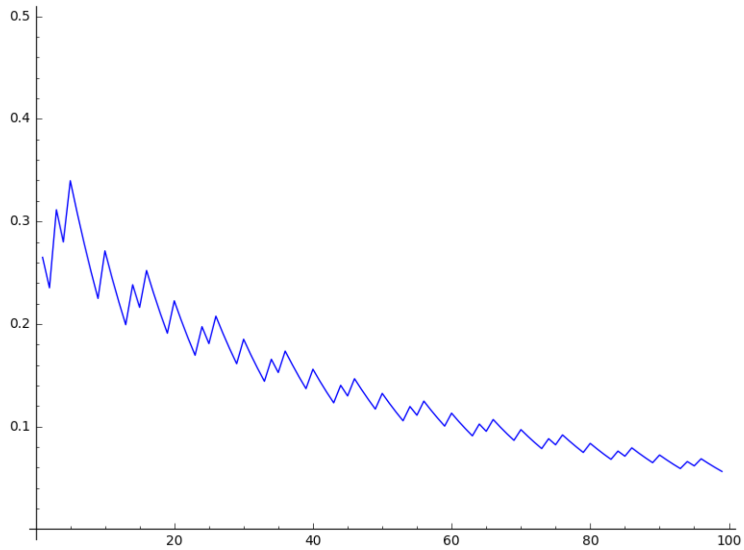

Abbildung 25: Die Abhängigkeit der Armutsquote vom Parameter $p = 1 + 0.1\,a$ für die Gammaverteilung $\mathcal{G}_{p,0.2}$ bei festem Armutskoeffizienten $\eta = 0.6$

Auch hier pendelt die Armutsquote irregulär hin und her, wenn sie auch in etwa dem Verlauf beim stetigen Modell folgt. Der Gini-Koeffizient nimmt hingegen sehr regelmäßig ab und spiegelt dabei auch die Abnahme der Ungleichheit wieder, die der Erwartung entspricht.

Sind die Einkommen in etwa gammaverteilt, so ändert sich die Armutsquote bei Änderung der Parameter b und p jeweils erratisch, während der Gini-Koeffizient sich stabil verhält.

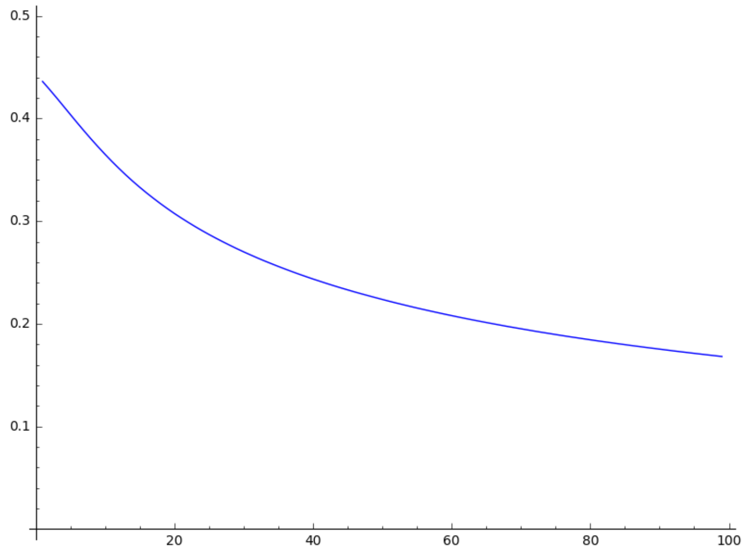

Abbildung 26: Die Abhängigkeit des Gini-Koeffizienten vom Parameter $p = 1 + 0.1\,a$ für die Gammaverteilung $\mathcal{G}_{p,0.2}$ bei festem Armutskoeffizienten $\eta = 0.6$

Beispiel: Weibull-Verteilung $\mathcal{W}_{k,T}$ bei Änderung von k

Bei festem $T = 5$ setzen wir in der Dichtefunktion $w_{k,5}$ den Parameter $k = 0.9 + 0.1\,a$, verwenden also $H(a, x) = w_{0.9+0.1\,a,5}(x)$. Die entsprechende Schar von Dichtefunktionen wird durch Abbildung 8 veranschaulicht. Die Variation der Armutsquote wird in Abbildung 27, die des Gini-Koeffizienten in Abbildung 28 wiedergegeben. Beide Größen verhalten sich „vernünftig", insbesondere geht die Armutsquote wie im kontinuierlichen Modell gegen 0.

Beispiel: Weibull-Verteilung $\mathcal{W}_{k,T}$ bei Änderung von T

Bei festem $k = 2$ setzen wir in der Dichtefunktion $w_{2,T}$ den Parameter $T = 0.5\,a$, verwenden also $H(a, x) = w_{2,0.5\,a}(x)$. Die entsprechende Schar von Dichtefunktionen wird durch Abbildung 7 veranschaulicht. Im kontinuierlichen Modell war die Armutsquote für diese Kurvenschar konstant. Im diskretisierten Modell wird die Variation der Armutsquote in Abbildung 29, die des Gini-Koeffizienten in Abbildung 30 wiedergegeben. Während der Gini-Koeffizient praktisch konstant ist, sich also stabil und der Erwartung entsprechend verhält, oszilliert die Armutsquote wild. Bei wachsendem Parameter a scheint sie um einen Wert nahe dem „theoretischen" 0.22 zu schwanken.

Sind die Einkommen gemäß der Weibull-Verteilung verteilt, so ändert sich die Armutsquote in Abhängigkeit vom Parameter T völlig irregulär.

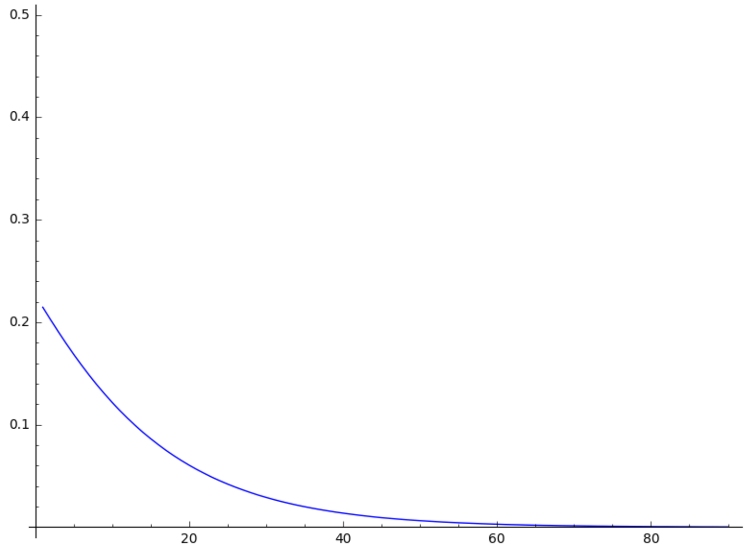

Abbildung 27: Die Abhängigkeit der Armutsquote vom Parameter a für die diskretisierte Weibull-Verteilung $\mathcal{W}_{0.9+0.1\,a,5}$ bei festem $T = 5$ und festem Armutskoeffizienten $\eta = 0.6$

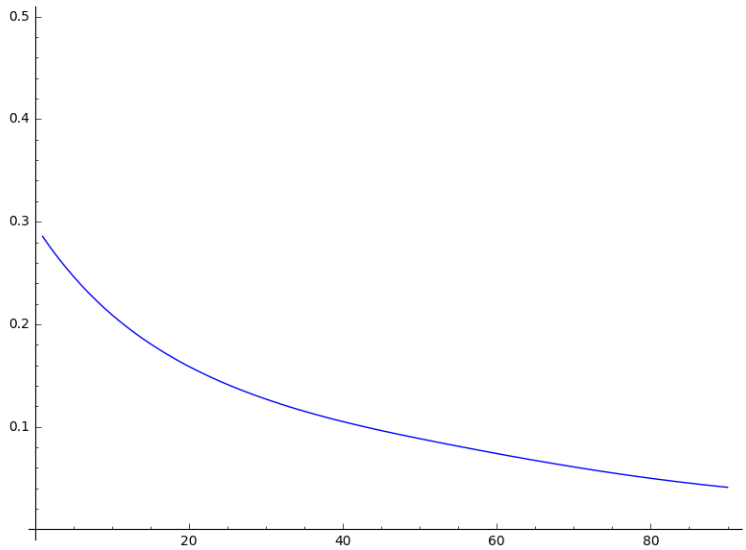

Abbildung 28: Die Abhängigkeit des Gini-Koeffizienten vom Parameter a für die diskretisierte Weibull-Verteilung $\mathcal{W}_{0.9+0.1\,a,5}$

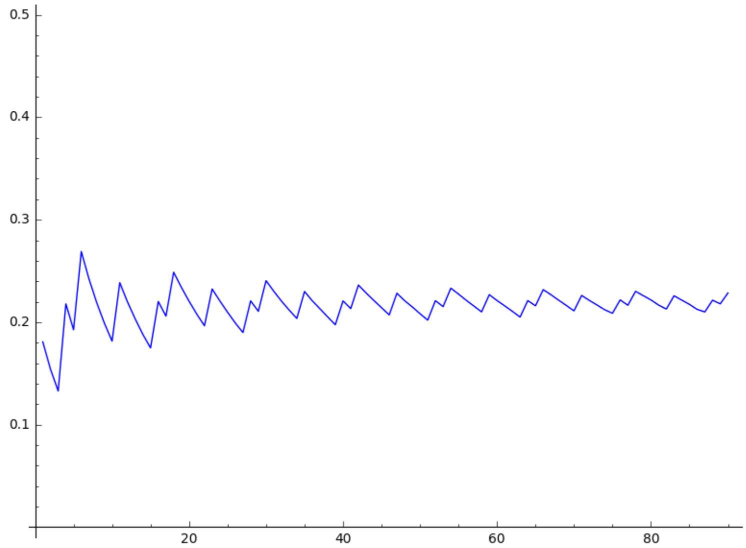

Abbildung 29: Die Abhängigkeit der Armutsquote vom Parameter a für die diskretisierte Weibull-Verteilung $\mathcal{W}_{2,0.5\,a}$ bei festem $k = 2$ und festem Armutskoeffizienten $\eta = 0.6$

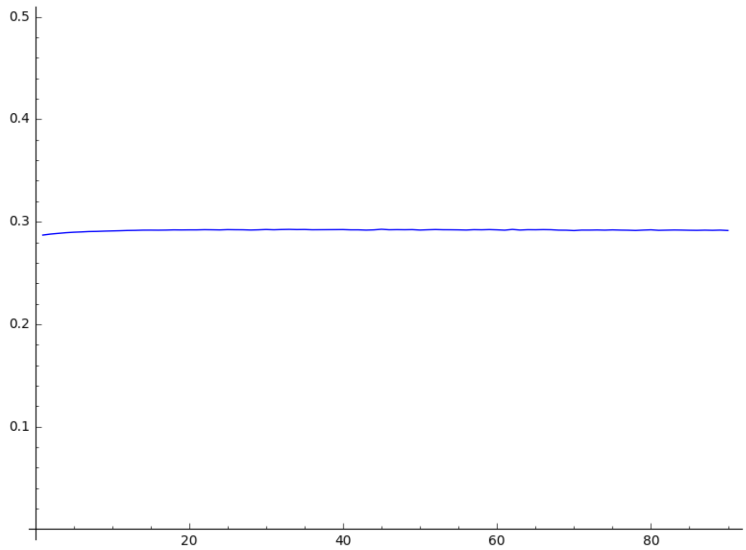

Abbildung 30: Die Abhängigkeit des Gini-Koeffizienten vom Parameter a für die diskretisierte Weibull-Verteilung $\mathcal{W}_{2,0.5\,a}$

Beispiel: Pareto-Verteilung $\mathcal{P}_{m,k}$ bei Änderung von m

Bei festem $k = 1$ vereinfacht sich die Dichtefunktion der Pareto-Verteilung für Argumente $x \geq m$ zu

$$\wp_{m,1}(x) = \frac{m}{x^2}\,.$$

Mit $m = a/5$, also $a = 5\,m$, und somit $H(a,x) = \wp_{a/5,1}(x) = a/5x^2$, wird wieder eine Schar von Verteilungen gewählt, siehe die Kurvenschar in Abbildung 12. Der optische Eindruck legt nahe, dass die Armut bei wachsendem m abnimmt, da insbesondere das Minimaleinkommen steigt – eine sinnvolle mathematische Definition von „Armut“ sollte diesen Effekt wiederspiegeln.

Die Variation der Armutsquote wird in Abbildung 31 gezeigt, die des Gini-Koeffizienten in Abbildung 32. Auch hier zeigt sich wieder das (in diesem Fall weitgehend, wenn auch nicht perfekt) stabile Verhalten des letzteren und das unstabile Verhalten der Armutsquote. Der Gini-Koeffizient sinkt für dieses Beispiel, entsprechend der Intuition, gegen einen Wert um die 0.6, der allerdings eine starke Ungleichverteilung anzeigt. Dies wird durch die „Endlastigkeit“, also das relative langsame „Abklingen“ der Potenz $1/x^2$ im Vergleich zur Exponentialfunktion e^{-x} verursacht, was mehr große Einkommen zulässt. Die Armutsquote scheint um einen Wert von zwischen etwa 0.16 und 0.18 zu schwanken und lässt keine Abnahme der Armut erkennen. Der theoretische Wert aus dem stetigen Modell, der ja von m unabhängig ist, ist $1 - 1/2\eta = 0.17$.

Bemerkenswert ist die Abwesenheit von Armut für $a \leq 14$, also $m \leq 2.8$. Dieses Paradoxon ist ein klarer Diskretisierungseffekt und liegt daran, dass für kleine m der Einkommensmedian nicht weit über dem Minimaleinkommen m liegt. Für $m = 2$ etwa wird die Dichtefunktion für $x \geq 2$ zu $2/x^2$. Die Einkommen 0 und 1 kommen gar nicht vor, das Einkommen 2 (bei geradem N genau) $N/2$-mal. Daher kann der Einkommensmedian M_E, je nach Rundungsartefakten, nur einen der Werte 2, 2.5 oder 3 annehmen, auf jeden Fall ist $\eta \cdot M_E \leq 2$ für den Standard-Wert $\eta = 0.6$, und darunter liegt ja kein einziges Einkommen. Im stetigen Modell ist der Median von $\mathcal{P}_{2,1}$ dagegen $m\,2^{1/k} = 2 \cdot 2 = 4$.

Das Verhalten der Armutsquote in diesem Beispiel lässt sich also durch die konkrete Konstruktion der diskreten Verteilung erkären: Für $k/m = 1/2$ ist der Median $= m$, da 50% der Einkommen exakt $= m$ sind, siehe Annahme (3). Diese Abweichung vom stetigen Szenario ist also plausibel. Aber dennoch verdeutlicht dieses Verhalten der Armutsquote wieder ein bekanntes Problem: Der krasse Sprung von 0 auf über 0.2 entspricht der instabilen Situation, wo das Mindesteinkommen von knapp über der Armutsgrenze auf knapp darunter sinkt – und das bei einer allgemeinen Anhebung aller Einkommen.

Beispiel: Pareto-Verteilung $\mathcal{P}_{m,k}$ bei Änderung von k

Für das letzte Beispiel wird bei der Pareto-Verteilung der Parameter $m = 10$ fest gewählt und die Abhängigkeit der Armutsquote vom Parameter k im diskreten Modell untersucht. Es wird $H(a,x) = \wp_{10,a/5}(x)$ gesetzt, also $a = 5\,k$. Der Effekt der Parameter-Änderung ist in Abbildung 33 dargestellt und entspricht den Ergebnissen aus dem stetigen Modell,

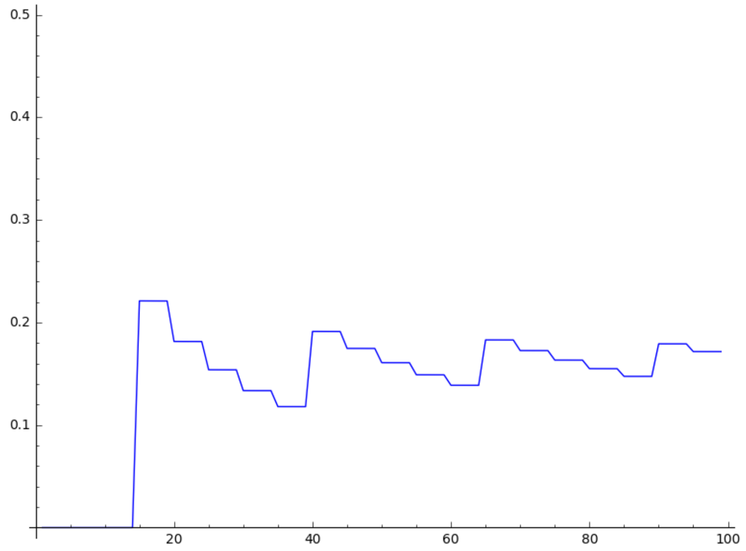

Abbildung 31: Die Abhängigkeit der Armutsquote vom Parameter $a = 5\,m$ für die Pareto-Verteilung $\mathcal{P}_{m,1}$

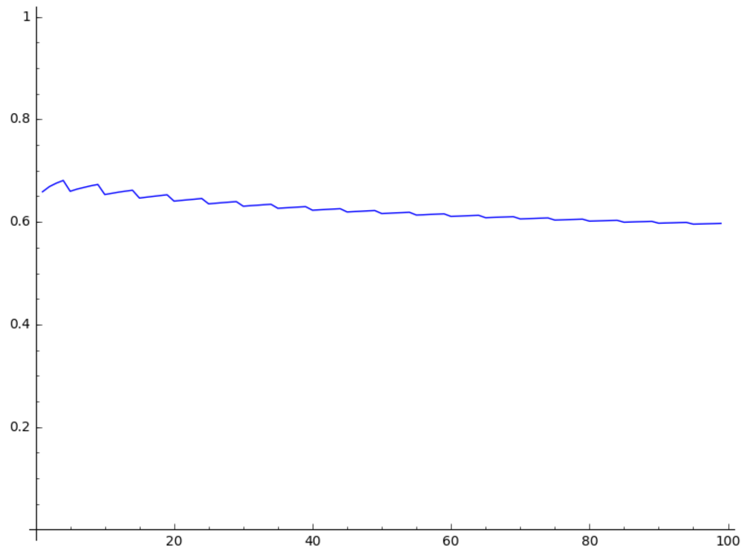

Abbildung 32: Die Abhängigkeit des Gini-Koeffizienten vom Parameter $a = 5\,m$ für die Pareto-Verteilung $\mathcal{P}_{m,1}$

siehe Abbildung 10. Wie dort widerspricht das der offensichtlichen Verschlechterung der Armutssituation, wie sie an der in Abbildung 11 dargestellten Kurvenschar augenfällig ist. Der stark abnehmende Gini-Koeffizient, siehe Abbildung 34, entspricht der Abnahme der Ungleichheit, die in diesem Fall durch das gesicherte Mindesteinkommen bei Ausdünnung der höheren Einkommen bedingt ist.

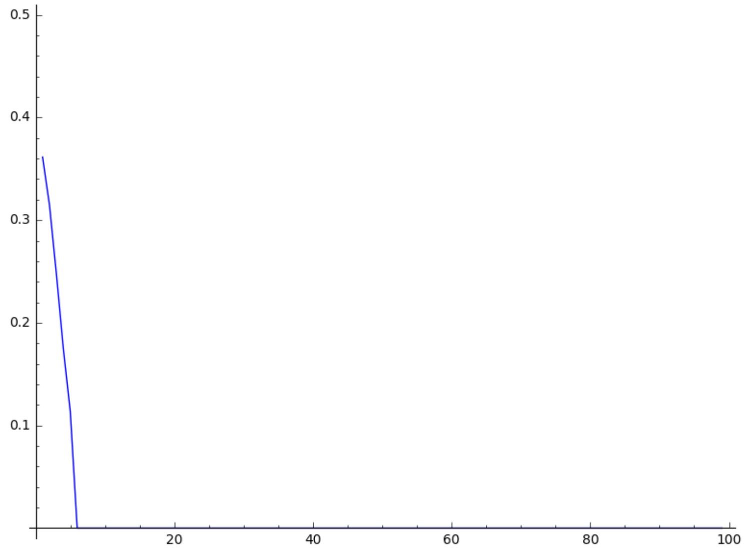

Abbildung 33: Die Abhängigkeit der Armutsquote vom Parameter $a = 5\,k$ für die Pareto-Verteilung $\mathcal{P}_{10,k}$

Sind die Einkommen nach Pareto verteilt, so ergibt die Abhängigkeit der Armutsquote von den Parametern in keiner Weise ein realistisches Bild von der Armutsentwicklung, bis hin zu einem der wahren Armutssituation gegenläufigem Verhalten. Die Armutsquote bildet hier eher die Einkommensungleichheit als die eigentliche Armutssituation ab.

9 Fazit

Ein mathematisches Modell ist nur dann sinnvoll, wenn sich aus ihm Schlussfolgerungen für das modellierte System herleiten lassen, die nicht offensichtlich sind. Andernfalls kann man sich das mathematische Modell gleich sparen.

Dass ein mathematisches Modell nicht für Vorhersagen und Extrapolationen („Hochrechnungen“) taugt, ist ein häufiges Phänomen, weil sich bei Hochrechnungen kleine Ungenauigkeiten in den Systemparametern oder Fehler in den Daten schnell hochschaukeln.

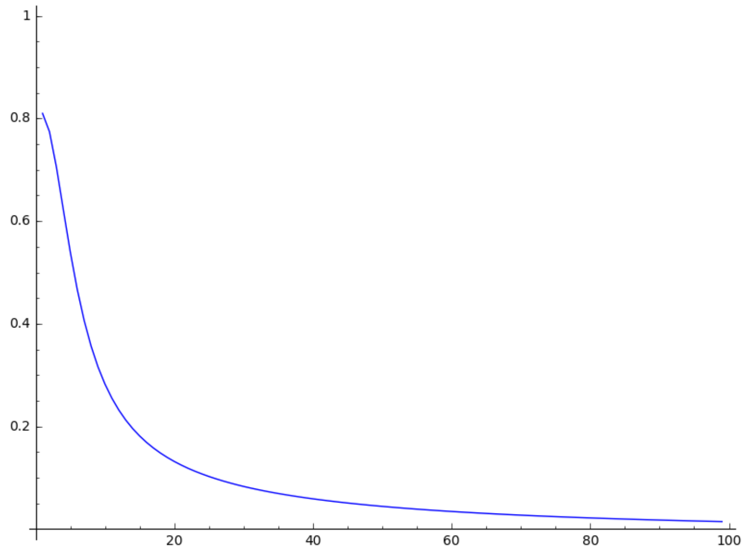

Abbildung 34: Die Abhängigkeit des Gini-Koeffizienten vom Parameter $a = 5\,k$ für die Pareto-Verteilung $\mathcal{P}_{10,k}$

Ein solches Modell kann dennoch zur Beurteilung des Systemverhaltens bei kleinen Variationen von Parametern, also bei „Interpolationen“, nützliche Ergebnisse liefern und selbst für Vorhersagen zumindest grobe qualitative Schlüsse ermöglichen [3].

Müssen die Schlussfolgerungen aus einem mathematischen Modell darüber hinaus jeweils ohnehin durch anderweitige Überlegungen auf Gültigkeit oder Plausibilität überprüft werden, ist es völlig nutzlos.

Das hier diskutierte mathematische Modell für Armut ergibt in schlechten Fällen absurde, in guten Fällen plausible Ergebnisse. Es mag für spezielle vergleichende Fragestellungen zur Armutsentwicklung geeignet sein – *als generelles Modell zur Beschreibung von Armut ist es unbrauchbar*. Es leidet unter schwerwiegenden Mängeln:

- Durch die Koppelung der Armutsgrenze an das mittlere Einkommen wird zu- oder abnehmender Wohlstand der Gesamtgesellschaft nicht berücksichtigt. Letztlich sagt die „Armutsquote“ somit nur etwas über die Ungleichheit der Einkommensverteilung aus. Und zur Beurteilung der Ungleichheit bei der Einkommensverteilung ist der Gini-Koeffizient ein wesentlich stabileres und zuverlässigeres Maß.

- Bei kleinen Schwankungen der Einkommensverteilung im realistischen Szenario einer diskreten Verteilung unterliegt die Armutsquote oft irregulären, z. T. erheblichen, Schwankungen. Sie ist daher zur Beurteilung von aktuellen Entwicklungen und Trends nicht geeignet.

- Auch kleine Änderungen des (letztlich willkürlich festgelegten) Armutskoeffizienten können große Sprünge der Armutsquote bewirken.

Im Gegensatz zu anderen mathematischen Modellen versagt dieses Modell nicht erst bei Extrapolationen oder Hochrechnungen, sondern schon bei Interpolationen, also kontinuierlichen geringfügigen Veränderungen von Parametern.

Wenn man schon Armut in einer Gesellschaft durch ein mathematisches Modell beschreiben will, dann sollte man einfach einen Minimalbedarf pro Person festlegen – arm ist dann, wessen Einkommen darunter liegt. Eine solche Festlegung ist allerdings wegen ihrer Allgemeinverständlichkeit für Politiker riskant, denn da kann jeder mitreden und seine Zweifel anbringen, etwa ob der Minimalbedarf korrekt definiert ist. Wird die Definition jedoch hinter einem mathematischen Formalismus versteckt, gewinnt sie den Anschein von Exaktheit und wissenschaftlicher Tiefe, der ihre Problematik verschleiert und der öffentlichen Diskussion entzieht.

A SageMath-Code

A.1 Median einer diskreten Verteilung

```
def medi(nlst):
    """Determine the median of a (non-normalized)
    discrete distribution -- i.e., nlst[i]
    is the number of arguments for which an
    (implicitly given) non-negative integer valued
    function takes the value i.
    Without further verification the function medi
    assumes that all list entries nlst[i] are natural
    numbers (integers >= 0)."""

    ll = len(nlst)
    n = sum(nlst)
    if n == 0:
        return 0
    k = 0
    s = 0
    while (2*s < n):
        s += nlst[k]
        if (2*s > n):
            return k
        elif (2*s == n):
            for j in range(k+1,ll):
                if nlst[j] > 0:
                    return (k+j)/2
        else:
            k += 1
```

A.2 Anzahl der Armutsgefährdeten

```
def poor(nlst,eta):
    """Determine the number of arguments ("poor people")
    for which the function f (implicitly given by the
    histogram nlst) takes a value < eta*M (M = median).
    Without further verification the function poor
    assumes that all list enties nlst[i] are natural
    numbers (integers >= 0)."""

    ll = len(nlst)
    n = sum(nlst)
    if n == 0:
        return 0
    # Determine the median:
    M = medi(nlst)
    # Determine the number of poor people
    pp = 0
    j = 0
    while (j < eta*M): # Current function value smaller
        pp += nlst[j]
        j +=1
    return pp
```

A.3 Einige Dichtefunktionen

```
def LnD(mu,sig,x):
    """Lognormal distribution"""
    if x <= 0:
        return 0
    else:
        z = N((log(x) - mu)^2 / (2 * sig^2))
        w = exp(-z)
        u = N(x * sig * sqrt(2*pi))
        y = w/u
        return y

plot(LnD(3,0.3,x), 0,50)
```

```
def GammaD(p,b,x):
    """Gamma distribution"""
    if x <= 0:
        return 0
    else:
        y = exp(-b*x)
        z = b^p * x^(p-1)
        u = y * z
        w = u / gamma(p)
        return w

plot(GammaD(2,0.2,x), 0, 40)

def WeiD(k,T,x):
    """Density function of a Weibull distribution
    with parameters k > 0, T > 0."""
    y = x^(k-1)/(T^k)
    z = exp(-x*y)
    w = k*y/T
    return w*z

plot(WeiD(2,15,x), 0, 50)

def Pareto(m,k,x):
    """Density function of a Pareto distribution
    with parameters m = minimum value, m > 0,
    k = exponent, k > 0."""
    if m <= 0:
        return 0
    elif k <= 0:
        return 0
    elif x < m:
        return 0
    else:
        a = k * m^k
        b = x^(k+1)
        return a/b

p = line([[0,0],[10,0]]) # Circumvent a problem with plot()
p += line([[10,0],[10,0.5/10]])
p += plot(Pareto(10,0.5,x),10,50)
p.show()
```

A.4 Die Armutsquote der Gammaverteilung

Die unvollständige Gammafunktion der unteren Grenze ist für reelles $x \geq 0$ und $a > 1$ definiert durch die Formel

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1}\, e^{-t}\, dt$$

und wird in SageMath durch die Funktion `gamma` (mit zwei Argumenten) repräsentiert. Die Gammafunktion ist für reelles $a > 1$ durch

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}\, e^{-t}\, dt$$

definiert und wird in SageMath ebenfalls durch `gamma()` (mit einem Argument) bezeichnet. Die unvollständige Gammafunktion der oberen Grenze ist für reelles $x > 0$ und $a > 1$ definiert durch die Formel

$$\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1}\, e^{-t}\, dt.$$

Daher gilt

$$\Gamma(a) = \gamma(a, x) + \Gamma(a, x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+ \text{ und } a > 1;$$

mit dieser Formel lässt sich in SageMath auch γ berechnen; das wird im folgenden Code-Schnipsel verwendet.

Zur numerischen Lösung einer Gleichung dient die SageMath-Funktion `find_root(equation,begin,end)`; sie setzt voraus, dass die Lösung durch ein sinnvolles abgeschlossenes Intervall `[begin,end]` eingegrenzt wird. Im vorliegenden Fall ist die Lösung wegen der strengen Monotonie eindeutig – falls sie gefunden wird, war das Intervall brauchbar gewählt.

```
eta = 0.6
qlst = []
for i in range(46):    # p = 1.5 ... 6.0
    p = 1.5 + i*0.1
    r = find_root(gamma(p)/2 == gamma(p,x),0.5,10)
    q = 1 - gamma(p, eta*r)/gamma(p)
    qlst.append([p,q])
ql = line(qlst)
ql.show(xmin=0, xmax=6, ymin=0, ymax=0.5)
```

A.5 Konstruktion einer Einkommensverteilung aus einer theoretischen Dichtefunktion

```
def dhist(NN,bb,fct):
    """Construct a histogram from the density function fct,
    with fct(x) monotonically decreasing for x >= bb,
    as income distribution of a population of size about NN"""
    hist = []    # the histogram to construct
    i = 0        # the loop index, representing the actual income
    go_on = True # a flag that switches as soon as the procedure
                 #   may safely terminate
    while go_on:
        x = round(NN*fct(i))
        if (x == 0 and i >= bb):
            go_on = False
        else:
            hist.append(x)
            i += 1
    return hist
```

A.6 Parameterabhängigkeit der Armutsquote

```
# Sample ditribution families
def ff(a,x):
    return LnD(3,0.01*a,x)      # Example Lognormal_sigma
#     return LnD(0.05*a,0.5,x)    # Example Lognormal_mu
#     return Gamma(2,0.01*a,x)    # Example Gamma_b
#     return Gamma(1+0.1*a,0.2,x) # Example Gamma_p
#     return WeiD(2,5*a,x)        # Example Weibull_T
#     return WeiD(a,5,x)          # Example Weibull_k
#     return Pareto(0.2*a,1.0,x)  # Example Pareto_m
#     return Pareto(10,0.2*a,x)   # Example Pareto_k

NN = 100000
eta = 0.6
bb = 50 # ff(i,x) monotonically decreasing for x > bb
```

```
poorlist = [] # Collect poverty data
phlist = []   # and poverty rates
glist = []    # and Gini coefficients
for a in range(1,101):
    def dfct(x):
        return ff(a,x)
    hint = dhist(NN,bb,dfct)
    x = poor(hint,eta)
    poorlist.append(x)
    ss = sum(hint)
    ph = N(x/ss)
    phlist.append(ph)
    glist.append(ginihist(hint))

pptlst = []
for i in range(1,len(phlist)):
    pptlst.append([i,phlist[i]])
pp = plot(line(pptlst))
pp.show(ymin=0,ymax=0.5)

gptlst = []
for i in range(1,len(glist)):
    gptlst.append([i,glist[i]])
pg = plot(line(gptlst))
pg.show(ymin=0,ymax=0.5)
```

B Monotonie-Eigenschaften der Verteilungsfunktionen

Von den vier exemplarischen Dichtefunktionen benötigen wir für den Algorithmus in Abschnitt 8 jeweils noch eine einfache Eigenschaft:

Hilfssatz 6 *Die Dichtefunktion $f(x) = \ell_{\mu,\sigma}(x)$ der Lognormal-Verteilung fällt monoton für $x \geq e^{\mu-\sigma^2}$.*

Beweis. Setzt man

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x} \quad \text{und} \quad h(x) = e^{-j(x)} \quad \text{mit} \quad j(x) = \frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\,,$$

so ist $f = gh$ und

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x^2} = -\frac{1}{x}\,g(x), \qquad j'(x) = \frac{\ln x - \mu}{\sigma^2 x}\,,$$

$$h'(x) = -e^{-j(x)}\,j'(x) = -h(x) \cdot \frac{\ln x - \mu}{\sigma^2 x}\,,$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) = -\frac{1}{x}\,g(x)\,h(x) - \frac{\ln x - \mu}{\sigma^2 x}\,g(x)\,h(x) \\ &= -\frac{1}{x}\,g(x)\,h(x)\left[1 + \frac{1}{\sigma^2}(\ln x - \mu)\right]. \end{aligned}$$

Für $x > 0$ ist auch $g(x) > 0$ und $h(x) > 0$, also

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\iff 1 + \frac{1}{\sigma^2}(\ln x - \mu) > 0 \iff \ln x > \mu - \sigma^2 \\ &\iff x > e^{\mu-\sigma^2}. \end{aligned}$$

◇

Hilfssatz 7 *Die Dichtefunktion $f(x) = g_{p,b}(x)$ der Gamma-Verteilung fällt monoton für $x \geq (p-1)/b$.*

Beweis. Setzt man

$$h(x) = x^{p-1} \cdot e^{-bx}\,,$$

so ist die Ableitung (da $p > 0$, also $p - 1 \neq -1$)

$$h'(x) = (p-1) \cdot x^{p-2} \cdot e^{-bx} - b \cdot x^{p-1} \cdot e^{-bx} = x^{p-2} \cdot e^{-bx} \cdot [(p-1) - bx]\,,$$

für $x > 0$. Also

$$h'(x) < 0 \iff x > (p-1)/b.$$

Dort fällt h, also auch f, monoton. ◇

Hilfssatz 8 *Die Dichtefunktion $f(x) = w_{k,T}(x)$ der Weibull-Verteilung fällt monoton für $x \geq T$.*

Beweis. Die Ableitung ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{k\,(k-1)\,x^{k-2}}{T^k} \cdot e^{-(x/T)^k} - \frac{k\,x^{k-1}}{T^k} \cdot \frac{k\,x^{k-1}}{T^k} \cdot e^{-(x/T)^k} \\ &= \frac{k\,x^{k-2}}{T^k} \cdot e^{-(x/T)^k} \cdot \left[k - 1 - k\,(\frac{x}{T})^k\right], \end{aligned}$$

also $f'(x) < 0 \iff x > T\,\sqrt[k]{1 - 1/k}$. Daher fällt f als Funktion von x erst recht für $x \geq T$ monoton. $\diamond$

Hilfssatz 9 *Die Dichtefunktion $f(x) = \wp_{m,k}(x)$ der Pareto-Verteilung fällt monoton für $x \geq m$.*

Beweis. Hier setzen wir

$$g(x) = \frac{k\,m^k}{x^{k+1}} = k\,m^k\,x^{-k-1},$$

also $g(x) = f_P(m,k,x)$ für $x > m$. Dann ist

$$g'(x) = k\,m^k\,(-k-1)\,x^{-k-2} = -k\,(k+1)\,m^k\,\frac{1}{x^{k+2}},$$

und das ist < 0 für $x > 0$. $\diamond$

Literatur

[1] Lebenslagen in Deutschland – Der Fünfte Armuts- und Reichtumsbericht der Bundesregierung. April 2017. Online:
https://www.armuts-und-reichtumsbericht.de/DE/Bericht/Archiv/archiv.html/ [aufgerufen am 30. Oktober 2021]

[2] Ian Dennis, Anne-Catherine Guio: Armut und soziale Ausgrenzung in der EU. Eurostat 16/2004, Katalognummer KS-NK-04-016-DE-N. SSN 1024-4379. Online:
http://edz.bib.uni-mannheim.de/www-edz/pdf/statinf/04/KS-NK-04-016-DE.pdf [aufgerufen am 19. August 2021]

[3] K. Pommerening: *Computersimulation dynamischer Systeme*. Online:
https://www.staff.uni-mainz.de/pommeren/Artikel/Oekosim.pdf [aufgerufen am 12. Januar 2022]

[4] K. Pommerening: *Der Gini-Koeffizient*. Online:
https://www.staff.uni-mainz.de/pommeren/MathMisc/Gini.pdf [aufgerufen am 31. Oktober 2021]

[5] K. Pommerening: *Der Median*. Online:
https://www.staff.uni-mainz.de/pommeren/MathMisc/Median.pdf [aufgerufen am 3. Februar 2022]

[6] Wikipedia: Äquivalenzeinkommen.
https://de.wikipedia.org/wiki/%C3%84quivalenzeinkommen [aufgerufen am 17. Februar 2022]

[7] Wikipedia: Armut.
https://de.wikipedia.org/wiki/Armut [aufgerufen am 19. August 2021]

[8] Wikipedia: Relative Armut.
https://de.wikipedia.org/wiki/Relative_Armut [aufgerufen am 17. Februar 2022]

[9] Wikipedia: Armutsgefährdung.
https://de.wikipedia.org/wiki/Armutsgef\%C3\%A4hrdung [aufgerufen am 17. Februar 2022]

[10] Wikipedia: Median.
https://de.wikipedia.org/wiki/Median [aufgerufen am 19. August 2021]

[11] Wikipedia: Gini-Koeffizient.
https://de.wikipedia.org/wiki/Gini-Koeffizient [aufgerufen am 31. Oktober 2021]

[12] Wikipedia: Logarithmische Normalverteilung.
https://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmische_Normalverteilung [aufgerufen am 16. Januar 2022]

[13] Wikipedia: Gammaverteilung.
https://de.wikipedia.org/wiki/Gammaverteilung [aufgerufen am 1. November 2021]

[14] Wikipedia: Rayleigh-Verteilung.
https://de.wikipedia.org/wiki/Rayleigh-Verteilung [aufgerufen am 1. November 2021]

[15] Wikipedia: Weibull-Verteilung.
https://de.wikipedia.org/wiki/Weibull-Verteilung [aufgerufen am 26. März 2022]

[16] Wikipedia: Pareto-Verteilung.
https://de.wikipedia.org/wiki/Pareto-Verteilung [aufgerufen am 1. November 2021]

[17] Wikipedia: Einkommensverteilung in der Schweiz.
https://de.wikipedia.org/wiki/Einkommensverteilung_in_der_Schweiz [aufgerufen am 17. Februar 2022]